AL2 - Compléments d'algèbre linéaire

Familles dénombrables de vecteurs

1 - Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Justifier que la famille $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P dans cette base ? *Penser à la formule de Taylor.*

2 - On considère la famille $((X-1)^2, X^2-1, (X+1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer les coordonnées d'un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ quelconque dans cette base, en fonction de a, b, c.

3. On ajoute les polynômes X^k à la famille précédente pour $k \geq 3$. La famille ainsi formée est-elle une base de $\mathbb{R}[X]$?

3 -On note $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(x)^n \in \mathbb{R}$.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\cos(x)) = 0$. Montrer que $P = 0$.

2. En déduire que la famille $(f_n)_n$ est libre.

4 - On travaille dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{nx} \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_n)_n$ est libre. *On pourra raisonner par récurrence en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.*

5 ★ - On travaille dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nx) \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $(f_n)_n$ est libre. *On pourra raisonner par récurrence en montrant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est libre.*

Sous-espaces vectoriels

6 - On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ donnés par $F = \mathbb{R}_0[X]$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.

7 - On considère F_1, F_2 et F_3 les trois sev de $\mathbb{R}^2$ donnés par

$$F_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}, \; F_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \text{ et } F_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}.$$

1. Montrer que $F_1 \cap F_2 = F_1 \cap F_3 = F_2 \cap F_3 = \{0\}$.
2. A-t-on $\mathbb{R}^2 = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$?

8 - Dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $F_1 = \{M \in S_2(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(M) = 0\}$, $F_2 = A_2(\mathbb{R})$ et $F_3 = \mathrm{Vect}(I_2)$. Montrer que la somme $F_1 + F_2 + F_2$ est directe.

9 ★ - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Pour $i = 1, \dots, n$, on note $F_i = \ker(f - a_i \, \mathrm{Id}_E)$. Montrer que la somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.

10 ★ - Soient E un espace vectoriel de dimension n et H_1,...,H_n des sous-espaces vectoriels de E de dimension $n-1$. *(On dit que ce sont des hyperplans).*

1. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) \geq n - 2$.
2. Montrer que pour tout $k \in \{1, ..., n\}$, $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_k) \geq n - k$.

Projecteurs et symétries

11 - Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x+y+z=0$ et D la droite engendrée par le vecteur $(1,0,1)$.

1. Montrer que P et D sont supplémentaires.

2. On note p (resp. s) la projection sur D (resp. la symétrie par rapport à D) parallèlement à P. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   a) Exprimer en coordonnées $p(x,y,z)$.
   b) Exprimer en coordonnées $s(x,y,z)$.

12 -Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan P d'équation $x - y + z = 0$ et D la droite engendrée par le vecteur $(1,1,1)$.

1. Montrer que P et D sont supplémentaires.

2. On note p (resp. s) la projection sur D (resp. la symétrie par rapport à D) parallèlement à P. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   a) Exprimer en coordonnées $p(x, y, z)$.
   b) Exprimer en coordonnées $s(x, y, z)$.

---

13 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $F = \ker \operatorname{tr}$ et $G = \operatorname{Vect}(I_n)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer la décomposition d'une matrice M quelconque dans la somme directe $F \oplus G$.
3. En déduire l'expression de la projection sur F parallèlement à G puis de la projection sur G parallèlement à F.
4. En déduire l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

---

14 -Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la décomposition d'une matrice M quelconque dans la somme directe $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire l'expression de la projection sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$ puis de la projection sur $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.
4. En déduire l'expression de la symétrie par rapport à $S_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

---

15 ★ - Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $f : E \to \mathbb{K}$ linéaire. On suppose $f \neq 0$.

1. Justifier que f est surjective.

On considère dans la suite $a \in E$ tel que $f(a) = 1$.

2. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Vect}(a)$ sont supplémentaires.
3. Déterminer la décomposition d'un élément x quelconque dans la somme directe $\ker f \oplus \operatorname{Vect}(a)$.
4. En déduire l'expression de la projection sur $\operatorname{Vect}(a)$ parallèlement à $\ker f$.

---

16 ★ - Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On considère l'application $f : v \in \mathbb{R}^3 \mapsto (u \cdot v)u \in \mathbb{R}^3$ où $u \cdot v$ désigne le produit scalaire euclidien usuel.

1. Montrer que f est une projection.
2. Décrire géométriquement $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.

Sous-espaces stables

---

17 - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}_E$.

1. Soit $a \in E$ non nul. Montrer que la famille $(a, f(a))$ est libre.
2. On note $E_a = \operatorname{Vect}(a, f(a))$. Montrer que E_a est stable par f.
3. On note $g : x \in E_a \mapsto f(x) \in E_a$ l'induit de f sur E_a. Donner la matrice de g dans la base $(a, f(a))$.

---

18 - Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = H \oplus \operatorname{Vect}(1, 1, 1)$.
3. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition et écrire la matrice de f dans cette base.
4. Montrer que H et $\operatorname{Vect}(1, 1, 1)$ sont stables par f.

---

19 -Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$. On rappelle que $P(f) = a_0 \operatorname{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_n f^n$.

1. Montrer que f et $P(f)$ commutent.
2. En déduire que $\ker P(f)$ et $\operatorname{Im} P(f)$ sont stables par f.

---

20 ★ - Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}[X]$.
