DM 2 : Un grand classique - les polynômes de Chebychev

Les questions précédées d'un ☞ devront être traitées obligatoirement.

Q1. ☞ Question préliminaires. Redémontrer les résultats suivants du cours :

a) Si $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ telle que $P_0 \neq 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg(P_k) < \deg(P_{k+1})$, alors la famille P_k est libre.

b) Si $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, alors la famille (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

On considère à présent la suite de polynômes $(T_n) \in \mathbb{R}[X]$ définie de la manière suivante :

$$T_0 = 1; T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Partie I- Propriétés élémentaires

Q2. ☞ Calculer T_2 et T_3 .

Q3. ☞ Montrer, par récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n .

Q4. ☞ En déduire que (T_n) forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

Q5. Quel est le coefficient dominant de T_n pour $n \geq 1$? On pourra également raisonner par récurrence double.

Partie II- Lien avec la linéarisation de cos

Q6. ☞ Soit $p, q \in \mathbb{R}$. En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$\cos(p) \cos(q) = \frac{\cos(p+q) + \cos(p-q)}{2}.$$

Q7. ☞ Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$2 \cos(\theta) \cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta).$$

Q8. En déduire, à l'aide d'une récurrence double, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta). \quad (1)$$

Q9. En déduire la valeur de $T_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q10. La réciproque.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

a) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $P_n(x) = T_n(x)$.

b) En déduire que $P_n = T_n$.

Q11. Factorisation de T_n . Dans cette question, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note $x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

a) Montrer que $T_n(x_k) = 0$.

b) Montrer que si $1 \leq k < l \leq n$, alors $x_l \neq x_k$.

c) En déduire la forme factorisée de T_n .

Partie III- Une équation différentielle

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}$. On note $f_n : \theta \in \mathbb{R} \mapsto T_n(\cos(\theta))$.

Q12. ☞ En dérivant une première fois l'équation (1), établir que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta)) = n \sin(n\theta)$$

Q13. En dérivant cette nouvelle relation, montrer que T_n vérifie la relation

$$(1 - X^2)T_n'' - XT_n' + n^2T_n = 0$$

Q14. On note $F_n = \{P \in \mathbb{R}[X], (1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0\}$.

a) ☞ Montrer que F_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

b) ★ Montrer que F est la droite engendrée par T_n . On pourra montrer que $\dim F = 1$.