

DM 1 : Polynômes d'interpolation de Lagrange

Le deuxième problème est une version généralisée du problème 1. Vous pouvez donc choisir de faire l'un ou l'autre de deux problèmes, **mais pas les 2!**

Problème 1. Version 3/2.

On fixe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ deux à deux distincts $a \neq b$, $b \neq c$ et $a \neq c$. On considère l'application

$$\Phi : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto (P(a), P(b), P(c)) \in \mathbb{R}^3.$$

Q1. Autour de Φ .

a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(a), (P + \lambda Q)(b), (P + \lambda Q)(c)) \\ &= (P(a) + \lambda Q(a), P(b) + \lambda Q(b), P(c) + \lambda Q(c)) \\ &= (P(a), P(b), P(c)) + \lambda(Q(a), Q(b), Q(c)) \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que Φ est linéaire.

b) Soit $P \in \ker \Phi$. Montrons que $P = 0$. Puisque $P \in \ker \Phi$, on a donc $P(a) = P(b) = P(c) = 0$. Or, P est de degré au plus 2. Si P était non nul, P posséderait alors au plus 2 racines. Or, il en possède au moins 3 (a, b, c) donc $P = 0$. Ceci prouve que Φ est injective.

c) On sait déjà que Φ est injective. Or, $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, donc par un argument de dimension, Φ est automatiquement bijective.

Q2. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. La question précédente assure donc qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_0(a) = \alpha, P_0(b) = \beta, P_0(c) = \gamma$. On va chercher à construire explicitement un tel polynôme. Pour cela, on introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_a = \frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)}; L_b = \frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)}; L_c = \frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$$

a) On calcule directement :

$$\Phi(L_a) = (1, 0, 0), \Phi(L_b) = (0, 1, 0), \Phi(L_c) = (0, 0, 1)$$

b) On sait que Φ est bijective. De plus, (L_a, L_b, L_c) est l'image de la base canonique de \mathbb{R}^3 par l'isomorphisme Φ^{-1} donc

(L_a, L_b, L_c) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

c) Puisque (L_a, L_b, L_c) est une base, écrivons $P_0 = xL_a + yL_b + zL_c$. On a alors $P_0(a) = \alpha = x, P_0(b) = \beta = y$ et $P_0(c) = \gamma = z$. Donc on a en fait

$$P_0 = \alpha L_a + \beta L_b + \gamma L_c$$

d) Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, en posant $\alpha = P(a), \beta = P(b)$ et $\gamma = P(c)$, $P = P_0$ satisfait le problème de la question précédente donc on a

$$P = P(a)L_a + P(b)L_b + P(c)L_c$$

Les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_2[X]$ dans (L_a, L_b, L_c) sont donc

$(P(a), P(b), P(c))$.

e) On doit trouver les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans la base (L_a, L_b, L_c) . En spécifiant la question précédente à $1, X$ et X^2 on a :

$$\begin{aligned} 1 &= L_a + L_b + L_c \\ X &= aL_a + bL_b + cL_c \\ X^2 &= a^2L_a + b^2L_b + c^2L_c \end{aligned}$$

La matrice de passage de (L_a, L_b, L_c) à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Problème 2. Version 5/2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On fixe $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ points 2 à 2 distincts. On considère l'application

$$\Phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Q1. Autour de Φ .

a) Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi(P + \lambda Q) &= ((P + \lambda Q)(a_0), \dots, (P + \lambda Q)(a_n)) \\ &= (P(a_0) + \lambda Q(a_0), \dots, P(a_n) + \lambda Q(a_n)) \\ &= (P(a_0), \dots, P(a_n)) + \lambda(Q(a_0), \dots, Q(a_n)) \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \end{aligned}$$

Ce qui prouve que Φ est linéaire.

b) Soit $P \in \ker \Phi$. Montrons que $P = 0$. Puisque $P \in \ker \Phi$, on a donc $P(a_0) = \dots = P(a_n) = 0$. Or, P est de degré au plus n . Si P était non nul, P posséderait alors au plus n racines. Or, il en possède au moins $n+1$ donc $P = 0$.

Ceci prouve que Φ est injective.

c) On sait déjà que Φ est injective. Or, $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, donc par un argument de dimension, Φ est automatiquement bijective.

Q2. Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La question précédente assure donc qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $P_0(a_i) = \alpha_i$. On va chercher à construire explicitement un tel polynôme. Pour cela, on introduit les polynômes d'interpolation de Lagrange : pour $0 \leq i \leq n$,

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

a) Soit $0 \leq i \leq n$. On calcule que $\Phi(L_i) = e_{i+1}$ où e_{i+1} est le $i+1$ -ième vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} .

b) On sait que Φ est bijective. De plus, (L_0, \dots, L_n) est l'image de la base canonique de \mathbb{R}^{n+1} par l'isomorphisme Φ^{-1} donc (L_0, \dots, L_n) forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Puisque (L_0, \dots, L_n) est une base, écrivons $P_0 = x_0 L_0 + \dots + x_n L_n$. On a alors, pour $0 \leq i \leq n$, $P_0(a_i) = \alpha_i = x_i$. Donc on a en fait

$$P_0 = \sum_{i=0}^n \alpha_i L_i$$

d) Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en posant $\alpha_i = P(a_i)$ pour $0 \leq i \leq n$, $P = P_0$ satisfait le problème de la question précédente donc on a

$$P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i$$

Les coordonnées d'un polynôme P quelconque de $\mathbb{R}_n[X]$ dans (L_0, \dots, L_n) sont donc $(P(a_0), \dots, P(a_n))$.

e) On doit trouver les coordonnées de $1, X, \dots, X^n$ dans la base (L_0, \dots, L_n) . En spécifiant la question précédente à X^i pour $0 \leq i \leq n$, on a : $X^i = \sum_{j=0}^n a_j^i L_j$. La matrice de passage de (L_0, \dots, L_n) à la base canonique est donc

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On parle de matrice de Vandermonde.