Programme de khôlle. Semaine 3

Description des thèmes

AL1- Rappels d'algèbre linéaire et compléments sur les matrices

Voir Semaine 1 (sous-espace vectoriel, application linéaire, matrice d'une application linéaire, trace, transposée, matrices symétriques et antisymétriques, etc.)

AL2- Compléments d'algèbre linéaire

1. Familles dénombrables de vecteurs.

   1) Généralisation de la notion de combinaison linéaire, espace-vectoriel engendré et familles génératrices pour les familles dénombrables. Exemples de $(1, X, \dots, X^n, \dots,)$ ou $(1, X^2, \dots, X^{2n}, \dots)$.
   2) Généralisation de la notion de famille libre pour les familles dénombrables.
      - Toute famille de polynôme échelonnée en degré est libre.
      - Exemple d'une famille de fonctions : $(x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(nx))_n$.
   3) Bases (pour les familles dénombrables).
      - Définition (libre et génératrice), coordonnées dans une base.
      - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$,$\mathbb{K}[X]$.
      - Exemple : toute famille de polynômes vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$ est une base.

2. Sommes de sous-espaces vectoriels.

   - Rappel de la somme de 2 sev, somme directe et caractérisation. Sev Supplémentaires. Rappel de la formule de Grassmann en dimension finie.
   - Exemple important : $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont deux sev supplémentaires. Décomposition d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans cette somme directe.
   - Définition de la somme de p sev, définition de la somme directe de p sev. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.
   - Base adaptée à la décomposition en somme directe.

3. Projecteurs et symétries.

   1) Projecteurs.
      - Définition de la projection sur F parallèlement à G. Propriétés.
      - Caractérisation des projecteurs : p linéaire et $p \circ p = p$.
      - Exemples de calculs dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
      - Matrice des projecteurs dans une base adaptée.
   2) Symétries
      - Définition de la symétrie par rapport F parallèlement à G. Propriétés.
      - Matrices des symétries dans une base adaptée.
      - Caractérisation des symétries : s linéaire et $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.
      - Exemples de calculs dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour la symétrie par rapport $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $A_n(\mathbb{R})$.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers insécables suivants : (pas de panachage possible).

- **Panier 1** : **Familles de polynômes.**

  1. Montrer que toute famille de polynôme échelonnée en degré est libre.
  2. Si $(P_n)_n \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ est une famille de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$, alors (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

- **Panier 2** : $A_n(\mathbb{R}) \oplus S_n(\mathbb{R})$.

  1. Rappeler les dimensions de $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$.
  2. Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux espaces supplémentaires.
  3. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que la décomposition de M dans la somme directe $S_n \oplus A_n$ est $M = \left(\frac{M^T+M}{2}\right) + \left(\frac{M-M^T}{2}\right)$.

- **Panier 3** : **Calculs.** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on note $F = \text{Vect}((1,1,1))$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x+y+z=0\}$.

  1. Montrer que $E = F \oplus G$.
  2. Calculer, en coordonnées, la projection $p((x,y,z))$ sur F parallèlement à G.
  3. Calculer, en coordonnées, la projection $s((x,y,z))$ par rapport à F parallèlement à G.

- **Panier 4** : **Projecteurs**. Soit E un $\mathbb{R}$-ev et F,G deux sev supplémentaires de E. On note p la projection sur F parallèlement à G.

  1. Rappeler la définition de p.
  2. Montrer que $p \circ p = p$.
  3. Montrer que $\ker p = G$.
  4. Montrer que $\text{Im} = F$.

Exercice au choix

Au choix du colleur, sur les chapitres de la semaine.