P1 - Compléments sur les variables aléatoires finies

Révisions de première année

$\boxed{1}$ - Un joueur de tennis enchaîne les matchs en compétition. Lors de son premier match de la saison, il estime qu'il a 1 chance sur 2 de gagner. Ensuite, s'il a gagné un match, il estime qu'il a 3 chances sur 4 de gagner le prochain match. S'il perd un match, il estime qu'il a encore une chance sur 2 de gagner le prochain match. On désigne par X_n la variable aléatoire qui vaut 0 si le n-ième match est perdu et 1 sinon. On notera $p_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.

1. Que dire de la loi de X_n pour $n \in \mathbb{N}$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_n$.
3. On définit la suite (U_n) par $U_n = p_n - \frac{1}{3}$.
   a) Montrer que (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
   b) En déduire une expression de U_n puis de p_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de (p_n).

$\boxed{2}$ - Une nouvelle maladie vient d'apparaître dans la population. Un individu pris au hasard pourra être soit contaminé, soit sain (il n'a jamais été contaminé), soit guéri. D'une semaine à l'autre, 25 % des personnes contaminées guérissent et 30% des personnes saines sont contaminées. Au début, tout le monde est sain et une personne guérie le reste à jamais.
On s'intéresse à l'évolution de la maladie. On regarde au hasard une personne dans la population. On notera $S_i/C_i/G_i$ les évènements : "la personne est Saine/Contaminée/Guérie" à la fin de la semaine i". On note enfin $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_n) \\ \mathbb{P}(C_n) \\ \mathbb{P}(G_n) \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on précisera, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

$\boxed{3}$ - On joue à la *Dame de Pique* avec un jeu de 52 cartes et chacun des 4 joueurs reçoit 13 cartes. Vous jouez à ce jeu et vous recevez donc 13 cartes. En utilisant si besoin des coefficients binomiaux, donner les probabilités des événements suivants :

1. Recevoir les 13 Cœurs dans son jeu.
2. Recevoir la Dame de Pique dans son jeu.
3. Recevoir au moins un cœur dans son jeu.
4. Recevoir les 4 Dames dans son jeu.
5. Recevoir la Dame de Pique et au moins un Cœur.

Couples et vecteurs de variable aléatoires finies

$\boxed{4}$ - Soit $n \geq 2$ un entier. Une urne contient 2 boules blanches et $n - 2$ boules rouges. On effectue n tirages sans remise. On appelle X le rang de sortie de la première boule blanche et Y le rang de sortie de la deuxième boule blanche.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$ pour $k \in \{1, ..., n-1\}$.
3. Déterminer la loi de Y.

$\boxed{5}$ -Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit (X, Y) un couple suivant la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, ..., n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

$\boxed{6}$ - Soit $n \geq 2$. Une urne contient 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotée 2, ..., n boules numérotées n.

1. On tire une boule de cette urne, on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

2. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.
   a) Quelle est la loi de T_1 ?
   b) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2).
   c) En déduire la loi de T_2.
   d) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?

e) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

---

7 - Une urne contient une boule blanche et une boule rouge, indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c autres boules de la couleur tirée ($c \neq 0$). On répète cette expérience en réalisant une succession de n tirages. On note $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ les variables aléatoires définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on tire une boule blanche au } i\text{-ème tirage} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $p \in \{2, ..., n\}$, la variable aléatoire Z_p par $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable aléatoire Z_p ?
2. Donner la loi et l'espérance de X_1.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
4. En déduire la loi et l'espérance de X_2.
5. Déterminer la loi de Z_2.
6. Donner l'univers-image $Z_p(\Omega)$.
7. Soit $p \leq n - 1$.
   a) Déterminer $P_{(Z_p = k)}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + cp}$.
   c) A l'aide d'une récurrence, montrer que X_p suit une loi de Bernoulli de paramère $1/2$.

Covariance

---

8 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. n clients ont le choix entre 3 restaurants : R_1, R_2 et R_3. Un client choisit au hasard de façon équiprobable un des 3 restaurants et les choix des clients sont indépendants. Pour $i = 1, 2, 3$, on note X_i le nombre de clients qui choisissent le restaurant i.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, quelle est la loi de X_i ? Donner alors $\mathbb{E}(X_i)$ et $V(X_i)$.
2. Déterminer la loi, puis l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$. *Indication : Que vaut $X_1 + X_2 + X_3$?*
3. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

---

9 -Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'expérience aléatoire suivante : on lance deux fois de suite une pièce truquée où la probabilité de tomber sur pile est $p \in]0, 1[$ et on répète n fois cette expérience de manière indépendante. On note X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire qui donne le nombre de fois que pile a été obtenu lors du 1er (resp. 2ème) lancer.

1. Déterminer la loi, puis l'espérance et la variance de X_1, X_2 et $X_1 + X_2$.
2. On note A le nombre de fois où pile a été obtenu sur les 2 lancers et B le nombre de fois où pile a été obtenu sur un seul des deux lancers.
   a) Donner les lois de A et B.
   b) Exprimer $X_1 + X_2$ en fonction de A et B.
   c) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(A, B)$.

---

10 -Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. On pose $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_i ?
2. On suppose $i < j$. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.
