DM 2 : Un grand classique - les polynômes de Chebychev

Les questions précédées d'un ☞ devront être traitées obligatoirement.

Q1. Question préliminaires. Redémontrer les résultats suivants du cours :

a) Voir COURS.

b) Voir COURS.

On considère à présent la suite de polynômes $(T_n) \in \mathbb{R}[X]$ définie de la manière suivante :

$$T_0 = 1; T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Partie I- Propriétés élémentaires

Q2. $T_2 = 2XT_1 - T_0 = \boxed{2X^2 - 1}$.

$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 2X(2X^2 - 1) - X = 4X^3 - 2X - X = \boxed{4X^3 - 3X}$.

Q3. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "T_n est un polynôme de degré n". On la démontre par récurrence double.

Initialisation :$T_0 = 1$ et $T_1 = X$ sont de degrés respectifs 0 et 1 donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on prouve $\mathcal{P}(n+2)$. Puisque $\deg(T_{n+1}) = n+1$, $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$. Comme $\deg(T_n) < n+2$, le degré de $2XT_{n+1} - T_n$ est égal à celui de $2XT_{n+1}$. On en déduit que T_{n+2} est bien de degré $n+2$, comme voulu.

Ceci $\boxed{\text{achève la récurrence double}}$ et prouve que $\boxed{\deg(T_n) = n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q4. On peut alors appliquer la question Q1-a à la famille (T_n) : $\boxed{\text{c'est une base de } \mathbb{R}[X]}$.

Q5. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "T_n a pour coefficient dominant 2^{n-1}". On la démontre par récurrence double pour $n \geq 1$.

Initialisation :$T_1 = X$ et $T_2 = 2X^2 - 1$ sont de coefficients dominants respectifs $1 = 2^{1-1}$ et $2 = 2^{2-1}$ donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on prouve $\mathcal{P}(n+2)$. Puisque $\deg(T_{n+1}) = n+1$, $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$. Comme $\deg(T_n) < n+2$, le degré et le coefficient dominant de $2XT_{n+1} - T_n$ sont égaux à ceux de $2XT_{n+1}$. Celui-ci vaut donc $2 \times 2^{n+1-1} = 2^{n+1} = 2^{n+2-1}$, comme voulu.

Ceci $\boxed{\text{achève la récurrence double}}$ et prouve que $\boxed{\text{le coefficient dominant de } (T_n) \text{ vaut } 2^{n-1}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie II- Lien avec la linéarisation de cos

Q6. Soit $p, q \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\cos(p)\cos(q) &= \left(\frac{e^{ip} + e^{-ip}}{2}\right)\left(\frac{e^{iq} + e^{-iq}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{4}(e^{i(p+q)} + e^{i(p-q)} + e^{i(-p+q)} + e^{-i(p+q)}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^{i(p+q)} + e^{-i(p+q)}}{2} + \frac{e^{i(p-q)} + e^{-i(p-q)}}{2}\right) \\
&= \boxed{\frac{\cos(p+q) + \cos(p-q)}{2}}
\end{aligned}$$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On applique la question précédent à $p = \theta$ et $q = (n+1)\theta$ et l'on a :

$$\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) = \frac{\cos(n\theta) + \cos((n+2)\theta)}{2}$$

d'où l'on tire :

$$\boxed{2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)}.$$

Q8. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$". On la démontre par récurrence double pour $n \geq 0$.

Initialisation :Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $T_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0\theta)$ et $T_1(\cos(\theta)) = X(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies et on prouve $\mathcal{P}(n+2)$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
T_{n+2}(\cos(\theta)) &= 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta)) \\
&= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta)) - \cos(n\theta) \text{ par les deux hypothèses de récurrence} \\
&= \cos((n+2)\theta) \text{ par Q7}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Ceci $\boxed{\text{achève la récurrence double}}$ et prouve que $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N},T_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta).}$

Ces polynômes permettent donc de développer $\cos(n\theta)$.

Q9. Soit $n\in\mathbb{N}$. On applique la formule précédente avec $\theta=0$ et l'on a $T_n(\cos(0))=\cos(n\times 0)=1$ donc $\boxed{T_n(1)=1}$.

Q10. La réciproque.

Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\theta\in\mathbb{R}, P_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)$.

a) Soit $x\in[-1,1]$ quelconque. Puisque $\cos(\mathbb{R})=[-1,1]$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $x=\cos(\theta)$. On a donc $P_n(x)=P_n(\cos(\theta))=\cos(n\theta)=T_n(\cos(\theta))=T_n(x)$. Donc $\boxed{\text{pour tout } x\in[-1,1], P_n(x)=T_n(x)}$.

b) Les polynômes T_n et P_n sont égaux sur tout $[-1,1]$ donc $\boxed{\text{coïncident en une infinité de points : ils sont donc égaux.}}$

Q11. Factorisation de T_n. Dans cette question, on fixe $n\in\mathbb{N}^*$. Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, on note $x_k=\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

a)

$$\begin{aligned}T_n(x_k)&=T_n\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)\\&=\cos\left(n\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\\&=\cos(k\pi-\pi/2)=0\end{aligned}$$

D'où $\boxed{T_n(x_k)=0}$.

b) On note $\theta_k=\frac{(2k-1)\pi}{2n}$. Si $1\leq k<l\leq n$, $\theta_k\neq\theta_l$. En outre, $\theta_k\in[\theta_1,\theta_n]=[\frac{\pi}{2n},\frac{(2n-1)\pi}{2n}]\subset[0,\pi]$. Or, la fonction cos est injective sur $[0,\pi]$ donc $\cos(\theta_k)\neq\cos(\theta_l)$ soit encore $\boxed{x_k\neq x_l}$.

c) On a donc à disposition n racines pour T_n qui est de degré n. Donc T_n est scindé à racine simples. Ainsi, si $n=0$, $T_0=1$ et pour $n\geq 1$, (on n'oublie pas le

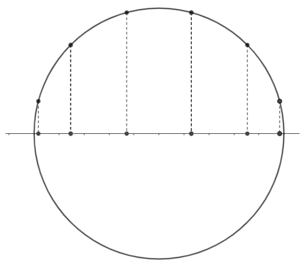

Figure 1 – Q11 : pour $n=7$. Les valeurs des x_k sont reportées sur l'axe des x.

coefficient dominant) :

$$\boxed{T_n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n}(X-x_k)}$$

Partie III- Une équation différentielle

Dans cette partie, on fixe $n\in\mathbb{N}$. On note $f_n:\theta\in\mathbb{R}\mapsto T_n(\cos(\theta))$.

Q12. On peut dériver f_n par la formule de composition et l'on trouve : $f_n'(\theta)=-\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))$. Or, on a aussi $f_n(\theta)=\cos(n\theta)$, ce qui donne en dérivant $f_n'(\theta)=-n\sin(n\theta)$ et donc

$$\boxed{\sin(\theta)T_n'(\cos(\theta))=n\sin(n\theta)}$$

Q13. En dérivant cette nouvelle relation, on trouve que

$$-\sin^2(\theta)T_n''(\cos(\theta))+\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta))=n^2\cos(n\theta))=n^2T_n(\cos(\theta))$$

On remplace alors $\sin^2(\theta)$ par $1-\cos^2(\theta)$ et l'on a pour tout $\theta\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{(1-\cos^2(\theta))T_n''(\cos(\theta))-\cos(\theta)T_n'(\cos(\theta))+n^2T_n(\cos(\theta))=0}$$

Puisque $\operatorname{Im}\cos=[-1,1]$, on en déduit, en remplaçant tous les $\cos(\theta)$ par x que pour tout $x\in[-1,1]$,

$$(1-x^2)T_n''(x)-xT_n'(x)+n^2T_n(x)=0$$

Le polynôme $(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X)$ s'annule donc en une infinité de points (tout $[-1,1]$), il est donc nul.

$$\boxed{(1-X^2)T_n''(X) - XT_n'(X) + n^2T_n(X) = 0.}$$

Q14. On note $F_n = \{P \in \mathbb{R}[X], (1-X^2)P'' - XP' + n^2P = 0\}$.

a) Le polynôme nul vérifie effectivement l'équation $(1-X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$ donc $0 \in F$.
Soit $P, Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $P + \lambda Q \in F$:

$$\begin{aligned}(1-X^2)(P+\lambda Q)'' - X(P+\lambda Q)' + n^2(P+\lambda Q) &= \\ (1-X^2)P'' - XP' + n^2P + \lambda((1-X^2)Q'' - XQ' + n^2Q)& \\ &= 0 + \lambda 0\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la linéarité de la dérivation de polynôme et de la composition. Donc $P + \lambda Q \in F$.
Ceci prouve que $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}[X]}$.

b) On a vu que $T_n \in F$ donc $\text{Vect}(T_n) \in F$. $\boxed{\text{Pour conclure que } F = \text{Vect}(T_n)\text{, il suffit de montrer que } \dim F = 1}$. C'est ce qu'on va faire ! Soit $P \in F$. On suppose $P \neq 0$. On note $d = \deg(P)$ et on écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On suppose donc que $\boxed{a_d \neq 0}$. On a alors

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1}$$

donc

$$XP'(X) = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^k = \sum_{k=0}^{d} k a_k X^k$$

De même, on a

$$P''(X) = \sum_{k=2}^{d} k(k-1)a_k X^{k-2} = \sum_{k=0}^{d-2} (k+2)(k+1)a_{k+2} X^k$$

donc

$$(1-X^2)P''(X) = \sum_{k=0}^{d-2} (k+2)(k+1)a_{k+2}X^k - \sum_{k=0}^{d} k(k-1)a_k X^k$$

On écrit alors l'égalité $(1-X^2)P''(X) - XP'(X) + n^2P(X) = 0$:

$$\sum_{k=0}^{d-2} \left((n^2a_k - ka_k - k(k-1)a_k + (k+2)(k+1)a_{k+2}\right) X^k +$$
$$(n^2a_{d-1} - (d-1)a_{d-1} - (d-1)(d-2)a_{d-1})X^{d-1} + (n^2a_d - da_d - d(d-1)a_d)X^d$$

En identifiant les coefficients à 0 : on a donc

- Coefficient devant X^d : $a_d(n^2 - d^2) = 0$. Puisque $a_d =\neq 0$, c'est que $n^2 = d^2$ et donc $\boxed{n = d}$.
- Coefficient devant X^{d-1} : $a_{d-1}(n^2 - (d-1)^2) = 0$. Puisque $n^2 \neq (d-1)^2$ (bah oui, ça fait d^2), c'est que $\boxed{a_{d-1} = 0}$.
- Coefficient devant X^k pour $0 \leq k \leq d-2$, on a l'équation :

$$a_k(n^2 - k^2) + (k+2)(k+1)a_{k+2} = 0 \iff a_k = -\frac{((k+2)(k+1)}{n^2 - k^2} a_{k+2}$$

On a donc a_{d-2} en fonction de a_d, puis a_{d-4} en fonction de a_{d-2} donc de a_d , etc. et pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \leq d$, il existe un nombre qui ne dépend que de d et k (et de n, qui est fixé, nombre que l'on peut écrire mais cela ne vaut pas la peine), disons $c_{k,d}$ tel que $a_{d-2k} = c_{k,d}a_d$. En partant de a_{d-1}, tous les termes a_{d-1-2k} sont nuls ! On a donc

$$P(X) = a_d \times \sum_{k \in \mathbb{N}, 2k \leq d} c_{k,d} X^{d-2k}$$

En posant $V_n = \sum_{k \in \mathbb{N}, 2k \leq d} c_{k,d} X^{d-2k}$, on a $P \in \text{Vect}(V_n)$. Donc $F \subset \text{Vect}(V_n)$. On sait en outre que $\dim F > 0$ donc $\boxed{\dim F = 1}$.
Ceci permet donc de prouver que $\boxed{F = \text{Vect}(T_n)}$.