DS 1

Problème 1. Autour des matrices symétriques.

Inspiré de CCINP 2019.

Partie I- Une matrice

Soit A la matrice définie par
$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\det(A) = \frac{1}{2^3}\det(B)$.
Calculons ensuite $\det(B)$: $\det(B) = 1 \times (-2) - 1 \times (-2-2) + 1 \times 2 = -2 + 4 + 2 = 8$.
Finalement, $\boxed{\det(A) = 1 \neq 0}$ donc $\boxed{A \text{ est inversible.}}$

Q2. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ni \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
X \in \ker(A - I_3) \iff AX = X &\iff \left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{2y}{2} + \frac{z}{2} = x \\ \frac{x}{2} - \frac{z}{2} = y \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{2} + \frac{z}{2} = z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} -\frac{x}{2} - \frac{2y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - y - \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{2y}{2} - \frac{z}{2} = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 43y = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{l} x = z \\ y = 0 \end{array}\right. \\
&\iff \exists t \in \mathbb{R}, \left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \\ z = t \end{array}\right.
\end{aligned}$$

On pose alors $\boxed{u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$ et l'on a bien $\boxed{\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(u)}$.

Q3.
$$A^T A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Partie II- Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

Dans la suite, on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de taille 2. On note $E = S_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille 2. On notera également F l'espace des matrices antisymétriques de taille 2.

Q4. M est symétrique si $\boxed{M^T = M}$.

Q5. La matrice nulle est dans E car $0^T = 0$.
Stabilité par combinaison linéaire : Soit $M, N \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $M + \lambda N \in E$.
$(M + \lambda N)^T = M^T + \lambda N^T$ par linéarité de la transposition. Comme $M, N \in E$, il vient$(M + \lambda N)^T = M + \lambda N$ donc $M + \lambda N \in E$. Ceci prouve que $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

Q6. Les trois matrices de $\mathcal{B}$ sont dans E. De plus, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est symétrique, alors $b = c$ et donc $M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{Vect}(\mathcal{B})$. Ceci prouve que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une famille génératrice de } E}$.

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$.
On a alors $\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que $\boxed{\mathcal{B} \text{ est libre.}}$ Finalement, $\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de } E \text{ et } \dim E = 3.}$

Q7. Soit $M \in F \cap E$. $M^T = M = -M$ donc $M = 0$. On a donc $F \cap E = \{0\}$.
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On cherche $A \in F$ et $S \in E$ tels que $M = S + A$. On vérifie (voir cours) que $S = \frac{M^T + M}{2}$ et $A = \frac{M - M^T}{2}$ conviennent. Ainisi, $F + E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $\boxed{F \text{ et } E \text{ sont supplémentaires.}}$
On a donc $\dim F + \dim E = 4$ d'où $\boxed{\dim F = 1}$.

Q8. Les calculs de la question précédentes nous donnent directement $\boxed{p(M) = \dfrac{M + M^T}{2} = \begin{pmatrix} a & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & d \end{pmatrix}}$.

Partie III- Une application linéaire sur E

On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E, f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$$

Q9. Il est clair que $f(E) \subset E$ donc f est bien défini.
Soit $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(M_1 + \lambda M_2) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 + \lambda a_2 & b_1 + \lambda b_2 \\ b_1 + \lambda b_2 & c_1 + \lambda c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a_1+\lambda a_2+c_1+\lambda c_2}{2} + b_1 + \lambda b_2 & \frac{a_1+\lambda a_2-c_1-\lambda c_2}{2} \\ \frac{a_1+\lambda a_2-c_1-\lambda c_2}{2} & \frac{a_1+\lambda a_2+c_1+\lambda c_2}{2} - b_1 - \lambda b_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{a_1+c_1}{2} - b_1 & \frac{a_1-c_1}{2} \\ \frac{a_1-c_1}{2} & \frac{a_1+c_1}{2} + b_1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{a_2+c_2}{2} - b_2 & \frac{a_2-c_2}{2} \\ \frac{a_2-c_2}{2} & \frac{a_2+c_2}{2} + b_2 \end{pmatrix} \\
&= f(M_1) + \lambda f(M_2)
\end{aligned}$$

Donc f est linéaire. C'est donc bien un $\boxed{\text{endomorphisme de } E}$.

Q10. On calcule

$$f\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = A}$$

Q11. Puisque A est inversible par I, $\boxed{f \text{ l'est}}$.

Q12. Soit $M = \begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix} inE$.

$$\operatorname{tr}(f(M)) = \frac{a+c}{2} - b + \frac{a+c}{2} + b = a + c = \boxed{\operatorname{tr}(M)}$$

Q13. Soit $M \in E \cap \ker \operatorname{tr}$. Montrons que $f(M) \in E \cap \ker \operatorname{tr}$. $f(M)$ est bien symétrique et $\operatorname{tr}(f(M)) = \operatorname{tr}(M) = 0$ par Q12 donc $f(M) \in E \cap \ker \operatorname{tr}$. Ainsi $\boxed{E \cap \ker \operatorname{tr} \text{ est stable par } f}$.

Problème 2. Prendre la tangente.

Partie I- Quelques résultats sur la fonction tangente

Les questions ci-dessous sont indépendantes mais peuvent être utilisées (si besoin) dans la suite du problème.

On rappelle que la fonction tangente tan est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Q1. On rappelle que cos est paire tandis que sin est impaire. On a donc pour $x \in \mathcal{D}$, $-x \in \mathcal{D}$ est

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

donc $\boxed{\text{tan est impaire}}$.
Soit $x \in \mathcal{D}$. $x + \pi \in \mathcal{D}$ et

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

donc tan est π-périodique.

Q2. tan est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ donc tan est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$\tan' = \frac{\sin'\cos - \cos'\sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} = \boxed{1 + \tan^2}$$

Il est alors clair que $\tan'$ est strictement positive donc tan est $\boxed{\text{strictement croissante sur }]-\pi/2, \pi/2[}$ et on rappelle que $\boxed{\lim_{x\to\pm\pi/2} \tan(x) = \pm\infty.}$

Q3. Soit $x, y \in \mathcal{D}$ tels que $x + y \in \mathcal{D}$, on utilise les formules de trigonométrie sur cos et sin :

$$\begin{aligned}
\tan(x+y) &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} \\
&= \frac{\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} \\
&= \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)+\frac{\sin(y)}{\cos(y)}}}{1 + \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} \\
&= \boxed{\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 + \tan(x)\tan(y)}}
\end{aligned}$$

Q4. cos ne s'annule pas sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est strictement positive. On par ailleurs $\tan = \frac{-\cos'}{\cos} = -(\ln(\cos)')$. Ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x = [-\ln(\cos(x)]_0^{\pi/4} = -\ln(\cos(\pi/4)) + \ln(\cos(0)) = -\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$$

Partie II- Sur le $DL_4(0)$ de tan

Q5. Quand $x \to 0$, $\tan(x) \sim x$.

Q6. tan est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$ donc par la $\boxed{\text{formule de Taylor-Young}}$, elle possède un $DL_n(0)$ à tout ordre.

Q7. Puisque tan est impaire, il n'y a que les termes impairs dans le DL de tan donc $\boxed{\text{les termes pairs sont nuls}}$.

Q8. Puisque tan possède un $DL_2(0)$ et que les termes d'ordre 2 est nul, on a nécessairement $\boxed{\tan(x) = x + 0x^2 + o(x^2)}$.

Q9. On injecte ce $DL_2(0)$ dans $1 + \tan^2(x)$:

$$1 + \tan^2(x) = 1 + (x + o(x^2))^2 = \boxed{1 + x^2 + o(x^2)}$$

Q10. On sait, par le cours, que l'on peut intégrer un DL. En intégrant le $DL_2(0)$ de $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, on obtient le $DL_3(0)$ de tan : $\tan(x) = 0 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$. Comme tan possède un DL_4 et que le terme d'ordre 4 est nul, on a directement

$$\boxed{\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).}$$

Partie III- Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le nombre

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^{2n} \mathrm{d}x$$

Q11. Si $x \in [0, \pi/4]$, $0 \leq \tan(x) \leq 1$. Donc $0 \leq \tan(x)^{2n} \leq 1$ et par $\boxed{\text{croissance de l'intégrale}}$, on obtient que $\boxed{0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}}$.

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x \in [0, \pi/4]$, $0 \leq \tan(x) \leq 1$ donc

$$\tan(x)^{2n+2} \leq \tan(x)^{2n}$$

Par croissance de l'intégrale, on a donc que $\boxed{\mathrm{I}_{n+1} \leq I_n}$ donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.

Q13. (I_n) est décroissante et minorée par 0, donc, $\boxed{\text{par le théorème de la limite monotone, } (I_n) \text{ converge}}$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{n+1} + I_n &= \int_0^{\pi/4} \tan(x)^{2n+2} + \tan(x)^{2n} dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan(x)^{2n}(1 + + \tan(x)^2) dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan(x)^{2n} \tan'(x) dx \\
&= \left[\frac{1}{2n+1} \tan^{2n+1}(x)\right]_0^{\pi/4} \\
&= \boxed{\frac{1}{2n+1}}
\end{aligned}$$

Q15. soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\frac{1}{2n+1} = I_n + I_{n+1} \leq 2I_n$ donc $\boxed{\dfrac{1}{4n+2} \leq I_n}$.

On a également $\frac{1}{2n-1} = I_{n-1} + I_n \geq 2I_n$ donc $\boxed{I_n \leq \dfrac{1}{4n-2}}$.

Q16. On a donc

$$\frac{4n}{4n+2} \leq 4nI_n \leq \frac{4n}{4n-2}$$

Or, $\frac{4n}{4n\pm 2} \sim \frac{4n}{4n} \sim 1 \to 1$ donc par le théorème des gendarmes, $4nI_n \to 1$, ce qui prouve que $\boxed{I_n \sim \dfrac{1}{4n}}$.

En outre, $\boxed{\lim I_n = \lim \dfrac{1}{4n} = 0}$.

Partie IV- Une suite récurrente

On considère l'application $g : x \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \tan(x) - 2x$.

Q17. g est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et $g'(x) = 1 + \tan^2(x) - 2 = \tan^2(x) - 1$. On factorise pour étudier le signe de g :

$$g'(x) = (\tan(x) - 1)(\tan(x) + 1)$$

On sait, par croissance de tan sur$]-\pi/2, \pi/2[$ que pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) \leq \pm 1 \iff x \leq \frac{\pi}{4}$.
On a donc, en notant $\beta = -g(\pi/4) = -1 + \frac{\pi}{2} > 0$,

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x){-}1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\tan(x){+}1$		$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

Q18. On note que $\boxed{g(0) = 0}$. Puisque g est strictement décroissante sur $]0, \pi/4]$, pour tout $x \in]0, \pi/4]$, $g(x) < 0$ donc l'équation $g(x) = 0$ ne possède pas de solution sur cet intervalle.
Ensuite, g est continue et strictement croissante sur $]\pi/4, +\infty[$ donc par le théorème de la bijection, g réalise une bijection de $]\pi, 4, \pi/2[$ vers $]-\beta, +\infty[$. Puisque $0 \in]-\beta, +\infty[$, 0 possède un unique antécédent par g dans $]\pi/4, \pi/2[$. Finalement, $\boxed{g(x) = 0 \text{ possède une unique solution sur }]0, pi/2[\text{, notée } \alpha}$.

Q19. Par le tableau de variation, $\boxed{g(x) \leq 0 \text{ pour } x \in [0, \alpha].}$

Dans la suite, on s'intéresse à la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \tan(u_n) - u_n$$

Q20. On commence par remarquer que $u_{n+1} = g(u_n) + u_n$. On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n < \alpha$.

Initialisation : $n = 0$. $u_0 = \frac{\alpha}{2} \in [0, \alpha[$. En outre, $u_1 = \tan(u_0) - u_0 \geq 0$ car $u_0 \geq 0$ et $g(u_0) \leq 0$ donc $u_1 = g_(u_0) + u_0 \leq u_0$ de sorte que l'on a bien $0 \leq u_1 \leq u_0 < \alpha$.

Hérédité : on suppose que $0 \leq u_{n+1} \leq u_n < \alpha$. On applique la fonction $f : x \mapsto g(x) + x$ à cette inégalité : puisque f est strictement croissante (puisque $f'(x) = \tan^2(x) \geq 0$ avec égalité seulement en 0), on a $f(0) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) < f(\alpha)$. Or, $f(\alpha) = g(\alpha) + \alpha = \alpha$ et $f(0) = 0$ donc on a bien

$$0 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} < \alpha$$

Ceci achève la récurrence et prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{0 \leq u_{n+1} \leq u_n < \alpha}$.

Q21. (u_n) est décroissante et minorée donc par le théorème de la limite monotone, (u_n) converge. On note ℓ la limite. En passant à la limite dans $u_{n+1} = g(u_n) + u_n$, on voit que $\ell = g(\ell) + \ell$ donc $g(\ell) = 0$. Or, $\ell \in [0, u_0] \subset [0, \alpha[$. ℓ est une solution de $g(x) = 0$ dans $[0, +\infty[$ qui n'est pas α : c'est donc 0. Ainsi, $\boxed{\lim u_n = 0}$.

Q22. $\star$ On pose $w_n = \frac{1}{3^n} \ln(u_n)$. $u_{n+1} = \tan(u_n) - u_n = \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3)$ puisque $u_n \to 0$. Ainsi,

$$\ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3)\right) = \ln\left(\frac{u_n^3}{3}(1 + o(1)\right) = 3\ln(u_n) - \ln(3) + \ln(1 + o(1)) = 3\ln(u_n) - \ln(3) + o(1)$$

Puis,

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{\ln(u_{n+1})}{3^{n+1}} - \frac{\ln(u_n)}{3^n} \\ &= \frac{\ln(u_n)}{3^n} - \frac{1}{3^n}\ln(3) + o(3^{-n}) - \frac{\ln(u_n)}{3^n} \\ &= -\frac{1}{3^n}\ln(3) + o(3^{-n}) \end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{w_{n+1} - w_n \sim -\frac{\ln(3)}{3^n}}$.

Remarque 5/2 : Ceci prouve que la série $w_{n+1} - w_n$ converge et donc (w_n) converge. Si on note ℓ cette limite, $w_n \to \ell$ et donc $\ln(u_n) \sim \ell 3^n$.

Problème 3. Sujet CCINP 2022.

Dans tout le problème, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de ce problème est d'étudier l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de sommes d'entiers.
On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, Φ^k la composée k-ième de l'application Φ.

Partie I- Préliminaires

Q1. Si $a, b \in \mathbb{C}$, et $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{(a+b)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i b^{k-i}}$.

Q2. On applique la formule du binôme de Newton avec $a = X$ et $b = 1$ et on trouve

$$\boxed{(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i}$$

Q3. On considère les polynômes $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$.

$$\begin{aligned}
\Phi(P_0)(X) &= P_0(X+1) - P_0(X) = 1 - 1 = \boxed{0} \\
\Phi(P_1)(X) &= P_1(X+1) - P_1(X) = X + 1 - X = \boxed{1} \\
\Phi(P_2)(X) &= P_2(X+1) - P_2(X) = (X+1)^2 - X^2 = X^2 + 2X + 1 - X^2 = \boxed{2X+1} \\
\Phi(P_3)(X) &= P_3(X+1) - P_3(X) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = \boxed{3X^2 + 3X + 1}
\end{aligned}$$

Q4. On a alors :

$$\Phi^2(P_2)(X) = \Phi(2X+1)(X) = (2(X+1)+1) - (2X+1) = \boxed{2}$$

puis $\Phi^3(P_2)(X) = \Phi(2)(X) = \boxed{0}$

Q5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$ par composition de polynôme puisque $\deg(P(X+1)) = \deg(P)$. Par combinaison linéaire, $P(X+1) - P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc $\boxed{u \text{ est bien à valeurs dans } \mathbb{R}_n[X]}$. Il reste à montrer que Φ est linéaire : soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\Phi(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) \\
& P(X+1) + \lambda Q(X+1) - P(X) - \lambda Q(X) \\
&= P(X+1) - P(X) + \lambda(Q(X+1) - Q(X)) \qquad = \Phi(P) + \lambda \Phi(Q)
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$

Q6. Pour $k \geq 1$, on note $\mathcal{P}(k)$ la propriété : " si $\deg P = k$, alors $\Phi(P)$ est de degré $k-1$". On prouve $\mathcal{P}(k)$ par récurrence forte sur k.

- Initialisation : $k = 1$. Si P est de degré 1, on écrit $P(X) = aX + b$ avec $a \neq 1$ et on a : $P(X+1) - P(X) = a \neq 0$ donc $\deg \Phi(P) = 0 = 1 - 1$. D'on $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- Hérédité : Soit $k \geq 2$. On suppose que $\mathcal{P}(i)$ est vraie pour tout $1 \leq i < k$ et on prouve $\mathcal{P}(k)$. Soit P de degré k. On écrit $P(X) = a_k X^k + Q(X)$ avec $Q \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. On a alors

$$\Phi(P)(X) = a_k \Phi(X^k)(X) + \Phi(Q)(X)$$

Or, par l'hypothèse de récurrence, si Q est non constant, il est de degré $\deg Q < k$ donc $\Phi(Q)$ est de degré $< k-1$. Ceci reste vrai si Q est constant puisque dans ce cas $\Phi(Q) = 0$.
On a ensuite

$$\Phi(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

donc $\deg \Phi(X^k) = k-1$. Comme $a_k \neq 0$, on en déduire finalement que

$$\boxed{\deg(\Phi(P)) = k - 1 = \deg P - 1}$$

Ceci prouve l'hérédité et achève la récurrence.

Q7. On raisonne par double inclusion : si $P \in \mathbb{R}_0[X]$, $\Phi(P) = 0$ donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker \Phi$. Réciproquement, on suppose que $\Phi(P) = 0$. Notons $k = \deg \Phi$. Si $k \geq 1$, alors $\deg \Phi(P) = k - 1 \geq 0$ et donc $\Phi(P) \neq 0$, ce qui est impossible. On en déduit que $k \leq 0$ donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$ et donc $\ker \Phi \subset \mathbb{R}_0[X]$. D'où $\boxed{\ker \Phi = \mathbb{R}_0[X]}$.

Q8. Le théorème du rang nous dit que si E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie et $u : E \to F$est linéaire,

$$\boxed{rg(u) + \dim \ker(u) = \dim E}$$

On a donc

$$\text{rg}(\Phi) + \dim \ker \Phi = \dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1$$

Puisque $\dim \ker \Phi = 1$ c'est donc que $\boxed{\text{rg}(\Phi) = n}$.

Q9. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. On a donc $Q(X+1) - Q(X) = P(X)$. Dès lors,

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} P(i) = \sum_{i=0}^{n} Q(i+1) - Q(i) = Q(n+1) - Q(0)}$$

$\boxed{\text{par télescopage}}$.

Partie II- Une famille de polynômes

Considérons la famille $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où $H_0 = P_0$ est le polynôme constant égal à 1 et pour chaque i non nul :

$$H_i(X) = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X - k) = \frac{X(X-1)\ldots(X-i+1)}{i!}.$$

Q10. Pour $0 \leq i \leq n$, il est clair que $\deg H_i = i$. La famille $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ est $\boxed{\text{échelonnée en degré}}$ donc par le cours, c'est une famille libre. De plus, elle possède $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathbb{R}_n[X]}$.

Q11. Soit i un entier entre 1 et n, $H_i(0) = 0 \times \frac{(-1)\ldots(-i+1)}{i!} = \boxed{0}$.

Q12. Soit i entier entre 1 et n.

$$\begin{aligned}
\Phi(H_i)(X) &= H_i(X+1) - H_i(X) \\
&= \frac{(X+1)X(X-1)\dots(X-i+2)}{i!} - \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!} \\
&= \frac{X(X-1)\dots(X-i+2)}{i!}\left(X+1-(X-i+1)\right) \\
&= \frac{X(X-1)\dots X-(i-1)+1}{i!} \times i \\
&= \frac{X(X-1)\dots X-(i-1)+1}{(i-1)!} = \boxed{H_{i-1}}
\end{aligned}$$

Q13. On note $\mathcal{P}(i)$ la propriété "$\Phi^i(H_i) = 1$". On la montre par récurrence sur $i \in \{1, \dots, n\}$.
Pour $i = 1$, $\Phi(H_1) = H_0 = 1$ est vraie.
Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$. On suppose que $\Phi^i(H_i) = H_{i-1}$ et on montre que $\Phi^{i+1}(H_{i+1}) = H_i$:

$$\Phi^{i+1}(H_{i+1}) = \Phi^i(\Phi(H_{i+1})) = \Phi^i(H_i) = 1$$

la dernière égalité valant par l'hypothèse de récurrence.
Ceci achève la récurrence et prouve que $\boxed{\Phi^(H_i) = 1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Q14. De même, on peut prouve que si $l < i$, $\Phi^l(H_i) = H_{i-l}$ et si $l > i$, $\Phi^l(H_i) = 0$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(X)$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq k \leq n$.

$$P(0) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(0) = a_0 H_0(0) = \boxed{a_0}$$

car $H_i(0) = 0$ si $i > 0$. Soit l entre 1 et n :

$$\begin{aligned}
\Phi^l(P)(0) &= \sum_{k=0}^n a_k \Phi^l(H_i)(0) \text{ par linéarite} \\
&= \sum_{k=l+1}^n a_k H_{k-l}(0) + a_l + 0 \text{ car } \Phi^l(H_k) = 0 \text{ pour } k < l \\
&= \boxed{a_l} \text{ car } H_i(0) = 0
\end{aligned}$$

Q15. Puisque (H_i) forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, les coordonnées d'un polynôme P dans cette base, qui sont uniques, fournissent des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(X)$. Par la question précédent, $a_l = \Phi^l(P)(0)$ d'où

$$\boxed{P(X) = \sum_{k=0}^n \Phi^k(P)(0) H_k(X).}$$

Q16. $0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) = H_1 = \boxed{X}$.

Q17. On part de Q16 : $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) = \Phi(0 \times H_1 + 1 \times H_2)(X) = \Phi(H_2)$ par Q12. On utilise alors Q9 : puisque $X = \Phi(H_2)$, on a

$$\sum_{k=0}^n k = \sum_{k=0}^n X(k) = H_2(n+1) - H_2(0) = H_2(n+1) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Déduire à l'aide de **Q9, de Q12 et de Q16** que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Q18. $0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X) = X + 2\frac{X(X-1)}{2} = X + X(X-1) = X + X^2 - X = \boxed{X^2}$.

Q19. On procède comme précédemment : on peut écrire que

$$X^2 = \Phi(1 \times H_2 + 2 \times H_3)$$

On introduit alors $Q(X) = H_2 + 2H_3 = \frac{X(X-1)}{2} + 2\frac{X(X-1)(X-2)}{6} = X(X-1)\left(\frac{1}{2} + \frac{X-2}{3}\right) = \frac{X(X-1)(2X-1}{6}$ de sorte que $\Phi(Q)(X) = X^2$. On utilise alors Q9 :

$$\sum k = 0^n k^2 = Q(n+1) - Q(0) = Q(n+1) = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Q20.

```
def somme_des_cubes(n):
    s=0
        for i in range(1,n+1):
            s+=i**3
    return s
```