DS 1

Durée : 4h

- Le devoir sera rédigé sur des copies doubles avec un stylo de couleur noir ou bleu. D'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats. Ne pas utiliser de correcteur (=souris, blanco)
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, ainsi qu'à l'orthographe.
- Indiquer le mot FIN à la fin de votre composition.
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Les calculatrices sont interdites.

N'abandonnez pas tant que vous n'avez pas lu toutes les questions du sujet. Pour traiter une question, vous pouvez admettre et utiliser le résultat d'une question précédente.

Pensez à mettre en valeur (souligner ou encadrer) vos résultats

Bon courage !

Ce sujet est constitué de **3 problèmes.** :

- Un premier problème autour des **matrices symétriques**.
- Un deuxième problème autour de la fonction **tangente**, constitué notamment d'une partie avec une **suite d'intégrales**, une partie sur **l'étude du DL de** tan et une partie avec l'étude d'une **suite récurrente**.
- Un troisième problème autour de l'application $P \in \mathbb{R}[X] \mapsto P(X+1) - P(X)$

Problème 1. Autour des matrices symétriques.

Inspiré de CCINP 2019.

Partie I- Une matrice

Soit A la matrice définie par

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Q1. Calculer $\det(A)$. La matrice A est-elle inversible ?

Q2. Démontrer que $\ker(A - I_3) = \mathrm{Vect}(u)$ où u est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$.

Q3. Calculer $A^T A$.

Partie II- Espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2

Dans la suite, on note $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de taille 2. On note $E = S_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille 2. On notera également F l'espace des matrices antisymétriques de taille 2.

Q4. Rappeler la définition d'une matrice symétrique.

Q5. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Q6. On note $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E puis en déduire la dimension de E.

Q7. Montrer que F est un supplémentaire de E. En déduire sa dimension.

Q8. On note p la projection sur E parallèlement à F. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déterminer, en justifiant votre réponse, la matrice $p(M)$.

Partie III- Une application linéaire sur E

On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E, f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$$

Q9. Montrer que f est un endomorphisme de E.

Q10. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Q11. Montrer que f est inversible. *On pourra utiliser la partie I.*

Q12. Montrer que f conserve la trace, à savoir pour tout $A \in E$, $\mathrm{tr}(f(A)) = \mathrm{tr}(A)$.

Q13. En déduire que le sous-espace $E \cap \ker \mathrm{tr}$ des matrices symétriques trace nulle est stable par f.

Problème 2. Prendre la tangente.

Partie I- Quelques résultats sur la fonction tangente

Les questions ci-dessous sont indépendantes mais peuvent être utilisées (si besoin) dans la suite du problème.

On rappelle que la fonction tangente tan est définie sur $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Q1. En utilisant les propriétés des fonctions cos et sin, montrer que la fonction tan est π-périodique et impaire.

Q2. Justifier que tan est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
En déduire le tableau de variations de tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On y fera figurer les limites.

Q3. Montrer que pour tout $x, y \in \mathcal{D}$ tels que $x + y \in \mathcal{D}$, on a

$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$$

Q4. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)\mathrm{d}x$.

Partie II- Sur le $DL_4(0)$ de tan

Q5. Rappeler, sans démonstration, un équivalent simple de $\tan(x)$ quand $x \to 0$.

Q6. Justifier que tan possède un développement limité en 0 à tout ordre.

Q7. Que dire des termes pairs dans le développement limité de tan ? Vous justifierez votre réponse.

Q8. En déduire que le $DL_2(0)$ de tan est donné par $\tan(x) = x + o(x^2)$.

Q9. En déduire le $DL_2(0)$ de $1 + \tan^2(x)$.

Q10. En intégrant ce développement limité, déterminer le $DL_3(0)$ de tan puis le $DL_4(0)$.

Partie III- Une suite d'intégrales

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère le nombre

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)^{2n}\mathrm{d}x$$

Q11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}$.

Q12. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Q13. Que peut-on dire concernant la convergence de la suite (I_n) ?

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.

Q15. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{4n-2} \leq I_n \leq \frac{1}{4n+2}$.

Q16. En déduire que $I_n \sim \frac{1}{4n}$. Quelle est la limite de (I_n) ?

Partie IV- Une suite récurrente

On considère l'application $g : x \in]-\pi/2, \pi/2[\mapsto \tan(x) - 2x$.

Q17. Dresser le tableau de variations de g.

Q18. Montrer qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, \pi/2[$ tel que $g(\alpha) = 0$. On justifiera soigneusement sa réponse.

Q19. Préciser le signe de $g(x)$ pour $x \in [0, \alpha]$.

Dans la suite, on s'intéresse à la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \frac{\alpha}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \tan(u_n) - u_n$$

Q20. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n < \alpha$. *On pourra utiliser sans preuve que pour tout $x \geq 0$, $\tan(x) \geq x$.*

Q21. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Q22. $\star$ On pose $w_n = \frac{1}{3^n} \ln(u_n)$. Déterminer un équivalent simple de $w_{n+1} - w_n$.

Problème 3. Sujet CCINP 2022.

Dans tout le problème, on fixe un entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de ce problème est d'étudier l'application Φ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\Phi : P(X) \mapsto P(X+1) - P(X)$$

afin de permettre le calcul de sommes d'entiers.
On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, Φ^k la composée k-ième de l'application Φ.

Partie I- Préliminaires

Q1. Donner la formule du binôme de Newton.

Q2. Soit k un entier non nul. Montrer que

$$(X+1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i$$

Q3. On considère les polynômes $P_0(X) = 1, P_1(X) = X, P_2(X) = X^2$ et $P_3(X) = X^3$. Montrer que

$$\Phi(P_0)(X) = 0 \text{ ; } \Phi(P_1)(X) = 1 \text{ ; } \Phi(P_2)(X) = 2X+1 \text{ ; } \Phi(P_3)(X) = 3X^2 + 3X + 1$$

Q4. Calculer $\Phi^2(P_2)(X)$ et $\Phi^3(P_2)(X)$.

Q5. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. *On pensera à vérifier que Φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$!*

Q6. Montrer que pour tout polynôme non constant P de degré k avec k un entier non nul, $\Phi(P)$ est un polynôme de degré $k-1$.

Q7. Montrer que $\ker \Phi = \mathbb{R}_0[X]$. *On pourra utiliser la question précédente.*

Q8. Rappeler le théorème du rang. En déduire $\operatorname{rg} \Phi$ puis donner l'image de Φ.

Q9. Soient P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\Phi(Q) = P$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} P(i) = Q(n+1) - Q(0).$$

Partie II- Une famille de polynômes

Considérons la famille $(H_i)_{0 \le i \le n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ où $H_0 = P_0$ est le polynôme constant égal à 1 et pour chaque i non nul :

$$H_i(X) = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (X-k) = \frac{X(X-1)\dots(X-i+1)}{i!}.$$

Q10. Prouver que $(H_i)_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q11. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $H_i(0) = 0$.

Q12. Montre que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi(H_i) = H_{i-1}$.

Q13. Montrer que pour tout i entier entre 1 et n, $\Phi^i(H_i) = 1$. *On pourra raisonner par récurrence.*

Q14. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k H_k(X)$ avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour $0 \leq k \leq n$. Montrer que $P(0) = a_0$ et que pour tout entier l entre 1 et n, $a_l = \Phi^l(P)(0)$.

Q15. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ peut s'écrire (de manière unique) sous la forme

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \Phi^k(P)(0) H_k(X).$$

Q16. Vérifier que $X = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X)$.

Q17. Déduire à l'aide de **Q9, de Q12 et de Q16** que :

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Q18. Vérifier que $X^2 = 0 \times H_0(X) + 1 \times H_1(X) + 2 \times H_2(X)$.

Q19. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Q20. Proposer en **Python** une fonction qui renvoie la valeur de la somme des cubes des n premiers entiers prenant en argument un entier naturel n passé en paramètre.