

### DM 3 : Inspiré de CCINP 2018

Les parties I-1 et II-2 sont obligatoires.

Les parties I-2, II-2 et II-3 sont facultatives.

Dans tout le problème, les variables aléatoires sont définies sur un univers fini  $\Omega$  muni d'une probabilité  $\mathbb{P}$ .

#### Partie I- Quelques propriétés autour de la variance et de la covariance

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles finies. On notera

- $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'ensemble image de  $X$  et pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i).$$

- $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$  l'ensemble image de  $Y$  et pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$q_i = \mathbb{P}(Y = y_i).$$

- Pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ , on note

$$r_{ij} = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

#### I.1- Quelques généralités

**Q1.** Quelle condition doivent vérifier  $X$  et  $Y$  pour que  $r_{ij} = p_i q_j$  ?

**Q2.** On rappelle que la covariance de  $X$  et  $Y$  est définie par

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))).$$

Montrer que

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

**Q3.** Exprimer  $\mathbb{E}(X^2)$  en fonction des  $p_i$  et des  $x_i$ . Proposer une formulation équivalente pour  $\mathbb{E}(Y^2)$ .

**Q4.** Montrer que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $p_i = \sum_{j=1}^p r_{ij}$ .

Dans la suite du problème, on note  $Z$  une variable aléatoire certaine égale à 1.

**Q5.** Donner l'ensemble image de  $Z$  et sa loi.

**Q6.** Calculer  $\mathbb{E}(Z^2)$ .

#### I.2- Une inégalité intéressante

**Q7.** Montrer que pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . *Indication : Développer  $(|x| - |y|)^2$ .*

**Q8.** Dans cette question, on admet le résultat suivant :

*Si  $Z$  et  $T$  sont deux variables aléatoires réelles finies telles que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $|T(\omega)| \leq Z(\omega)$ , alors  $\mathbb{E}(T) \leq \mathbb{E}(Z)$ .*

Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}(XY) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2)).$$

**Q9.** En utilisant la variable certaine  $Z$ , montrer que  $\mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}(X^2))$ .

#### Partie II- Étude de la matrice de covariance

Dans cette partie, on considère trois variables aléatoires réelles finies  $V_1, V_2$  et  $V_3$ . On définit  $K$ , la **matrice de covariance** de  $V_1, V_2, V_3$ , comme étant la matrice carrée de taille 3 donnée par

$$K = \begin{pmatrix} \text{cov}(V_1, V_1) & \text{cov}(V_1, V_2) & \text{cov}(V_1, V_3) \\ \text{cov}(V_2, V_1) & \text{cov}(V_2, V_2) & \text{cov}(V_2, V_3) \\ \text{cov}(V_3, V_1) & \text{cov}(V_3, V_2) & \text{cov}(V_3, V_3) \end{pmatrix}.$$

**II.1- Étude d'un exemple - début.** Dans cette sous-partie, on suppose que les trois variables aléatoires  $V_1, V_2$  et  $V_3$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et qu'elles vérifient

les conditions suivantes : il existe  $p_1, p_2, p_3 \in ]0, 1[$  tels que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  et

$$\mathbb{P}((V_1 = i) \cap (V_2 = j) \cap (V_3 = k)) = \begin{cases} p_1 & \text{si } i = 0 \text{ et } j = k = 1 \\ p_2 & \text{si } j = 0 \text{ et } i = k = 1 \\ p_3 & \text{si } k = 0 \text{ et } i = j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q10.** Montrer que  $\mathbb{P}(V_1 = 1) = 1 - p_1$ . En déduire que  $V_1$  suit la loi de Bernoulli de paramètre  $1 - p_1$ . Montrer de même que  $V_2$  et  $V_3$  sont des variables de Bernoulli de paramètres respectifs  $1 - p_2$  et  $1 - p_3$ .

**Q11.** Montrer que  $\mathbb{V}(V_1) = p_1(1 - p_1)$ .

**Q12.** On pose  $S = V_1 + V_2 + V_3$ . Montrer que  $S$  suit la loi certaine égale à 2. En déduire sa variance.

**Q13.** Justifier que  $V_1 V_2$  est une variable de Bernoulli dont on précisera le paramètre.

**Q14.** En déduire que  $\text{cov}(V_1, V_2) = -p_1 p_2$ .

**Q15.** Vérifier que la matrice  $K$  est égale à

$$\begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix}.$$

**II.2- Etude d'un exemple - suite.** On considère toujours l'exemple de la sous-partie précédente.

**Q16.** Montrer que le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est dans le noyau de  $K$ .

**Q17.** Déterminer le rang de  $K$  puis son noyau.

**Q18.** On suppose dans cette question que  $p_2 = p_3 = p$ .

- Exprimer  $K$  en fonction de  $p$ .
- Montrer que  $K - pI_3$  n'est pas inversible.
- Exprimer  $\text{tr}(K)$ .

**II.3- Retour au cas général** On revient au cas général :  $V_1, V_2$  et  $V_3$  sont trois variables aléatoires réelles finies quelconques.

**Q19.** Montrer que  $K$  est une matrice symétrique.

**Q20.** Soit  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . En développant le calcul de la variance de  $W = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$ , montrer que

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 x_i x_j \text{cov}(V_i, V_j) \geq 0$$

**Q21.** Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ , montrer que la relation précédent se met sous la forme

$$X^T K X \geq 0.$$

**Q22.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $KX = \lambda X$ . (On dit que  $\lambda$  est une valeur propre de  $K$  et  $X$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ .) En utilisant la question précédente, montrer que  $\lambda \geq 0$ .