Programme de khôlle. Semaine 5

Description des thèmes

P1 - Compléments sur les variables aléatoires finies

1) Rappels de 1ère année.

   (a) Rappels de la notion de loi d'une variable aléatoire.

   (b) Espérance et variance d'une var.
   - Définition de l'espérance. Linéarité de l'espérance. Formule de transfert.
   - Définition de la variance. Formule de Konig-Huygens. Formule $V(aX+b)$.

   (c) Rappels des lois usuelles : loi binomiale, loi de Bernoulli, loi certaine, loi uniforme.

   (d) Conditionnement et indépendance.
   Définition de la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$ et formule de Bayes. **Formule des probabilité totales**. Définition de deux événements indépendants.

   (e) Dénombrement.
   - Rappels de quelques cardinaux à connaître :si E désigne un ensemble à n éléments, cardinal de l'ensemble des k-uplets, de l'ensemble des parties de E, de l'ensemble des parties de E à k éléments, du nombre de bijection de E dans E.
   - Rappels de quelques méthodes de dénombrement : principe multiplicatif, disjonction.

2) Couples de variables aléatoires.
   Loi conjointe d'un couple de variable aléatoire. Lois marginales d'un couple. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe. 2 exemples : tirage de deux boules dans une urne à 4 boules numérotées, avec remise ou sans remise. Extension aux n-uplets de variables aléatoires. Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

3) Variables aléatoires indépendantes.

   (a) Couple de variables aléatoires indépendantes.
   - Définition avec $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$. Calcul de $\mathbb{P}(X \in A \cap Y \in B)$.
   - Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ aussi.
   - $\mathbb{E}(XY)$ si X et Y indépendantes.
   - Application au calcul de $\mathbb{E}(2^{X+Y})$ si X et Y suivent la loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$.

   (b) Familles de variables (mutuellement) indépendantes.
   - Définition. Groupement par paquets et fonction de variables indépendantes.
   - Somme de n variables indépendantes suivant une loi de Bernoulli.

4) Covariance.
   Définition. Variance de $X+Y$. Formule $\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Cas d'un couple de variable indépendante : $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$. $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \iff V(X+Y) = V(X)+V(Y) \iff \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Réciproque fausse : un exemple de variables non indépendantes de covariance non nulle.

Questions de cours

Le khôlleur fera son marché dans l'un des paniers suivants :

- **Panier 1** : **Tirage dans une urne.** Une urne contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne. On note Y_1 (resp. Y_2) le numéro de la première (resp. deuxième) boule.
  1. Donner la loi conjointe de (Y_1, Y_2).
  2. Donner la loi de Y_1. Calculer la loi de Y_2.
  3. Dire si les variables Y_1 et Y_2 sont indépendantes, en justifiant.
- **Panier 2** : **Lancer de dés**. On lance deux dés à 6 faces indépendants. On note X le numéro du premier dé et Y le numéro du second. Calculer $\mathbb{E}(2^{X+Y})$. (ça fait 441, mais on s'en fiche, c'est bien sûr la méthode qui compte !).
- **Panier 3** : Soit $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires (mutuellement) indépendantes qui suivent toutes la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Montrer que $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. *La preuve vue en classe est une récurrence.*
- **Panier 4** : **Covariance.** Démontrer les deux formules suivantes :
  1. $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
  2. $V(X+Y) = V(X) + 2\mathrm{Cov}(X,Y) + V(Y)$

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.