An2 -Intégration sur un intervalle quelconque

Nature et calcul d'intégrales impropres

1 - *De l'importance de savoir déterminer un équivalent.*

1. Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de $\sqrt{1+h}$ lorsque $h \to 0$.

2. En faisant le changement de variable, $h = \frac{1}{x}$, déterminer un équivalent simple de $x+2-\sqrt{x^2+4x+1}$ lorsque $x \to +\infty$.

3. En déduire la nature de l'intégrale, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\right) \mathrm{d}x$.

2 - *Un exercice guidé.*

1. Rappeler la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, puis pour $a \in \mathbb{R}$, en déduire la nature de $\int_a^{a+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-a}}$.

2. Soit $a < b$ deux réels. Montrer que l'intégrale $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ est convergente.

3. Le cas $a = -1$ et $b = 1$.
   a) Rappeler une primitive de $x \in]-1,1[\mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
   b) En déduire la valeur de $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

4. On revient au cas général. En faisant le changement de variable affine, $u = -1+2\frac{x-a}{b-a}$, déterminer la valeur de $\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

3 - Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x-1}$

c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{4/3}}\mathrm{d}t$

4 - Montrer que les intégrales impropres suivantes convergent et calculer leur valeurs :

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

5 -Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x+e^x}\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x^2-x}}\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\ln x}\mathrm{d}x$

f) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x^{5/3}}\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$

h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{1+\sqrt{|x|}}\mathrm{d}x.$

6 ★ - Montrer que l'intégrale impropre suivante est convergente :

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{x^x-1}{\ln(1-\sqrt{x^2-1})}\mathrm{d}x$$

7 ★ -

1. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x$.

2. En déduire que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^3\sin(x^8)\mathrm{d}x$ converge.

En fonction d'un paramètre

8 - **Intégrales de Bertrand.** Déterminer, en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la nature des intégrales impropres suivantes, appelées intégrales de Bertrand,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\ln(x))^\beta}\mathrm{d}x$$

$\boxed{9}$ **-** Déterminer, en fonction des paramètres $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la nature des intégrales impropres suivantes,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\mathrm{d}x$$

$\boxed{10}$ **-**Déterminer, en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ | b) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t\ln(t)}{(1+t^2)^\alpha}\mathrm{d}t$

Exercices plus théoriques

$\boxed{11}$ **-** *Une intégrale semi-convergente.*

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ est convergente. *On pourra s'aider d'une intégration par parties.*

2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{d}t$ diverge. *On pourra utiliser la formule de linéarisation de* $\sin^2(x)$.

3. Après avoir justifié que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente. *On dit que c'est un intégrale semi-convergente.*

$\boxed{12}$ ★ **-** Soit $f : [1, +\infty[$ continue et **décroissante**. On suppose que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge.

1. Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.
2. En déduire que pour tout $x \geq 1$, $f(x) \geq 0$.
3. Montrer que $xf(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

$\boxed{13}$ ★ **-** *Transformée de Laplace.* Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et $s_0 \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}\mathrm{d}t$ converge absolument. Montrer que pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ converge absolument.

2. On suppose désormais que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-s_0 t}\mathrm{d}t$ converge (sans forcément être absolument convergente).

a) On note $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une primitive de $t \mapsto f(t)e^{-s_0 t}$. Montrer que F est bornée sur $[0, +\infty[$.

b) En déduire que pour tout $s > s_0$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t$ converge.

$\boxed{14}$ ★ **-** Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. On définit, sous réserve d'existence, les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \text{ et } J = \int_0^{+\infty} \frac{f(1/x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

1. On suppose dans cette question que f est **bornée** et prolongeable par continuité en 0. Montrer que les intégrales I et J sont bien convergentes et que $I = J$.

2. On suppose dans cette question que $f(x) = \frac{1}{1+x^n}$ pour tout $x > 0$. Calculer $I + J$ et en déduire la valeur de I.

3. On suppose dans cette question que $f = \ln$. Montrer que I et J sont convergentes et que $I = J$. En déduire la valeur de I.