DM 4 : Autour l'intégrale de Dirichlet

La partie I est obligatoire.

La partie II est facultative.

Partie I- Nature de l'intégrale - OBLIGATOIRE

Q1. Justifier que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

Q2.

a) Soit $R > 1$. Montrer que

$$\int_1^R \frac{\sin(t)}{t}dt = \cos(1) - \frac{\cos(R)}{R} - \int_1^R \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

b) Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}dt$ est **absolument** convergente.

c) En déduire $\int_1^{\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge.

Q3. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ est convergente.

Q4. Nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)^2}{t}dt$.

a) En vous inspirant des questions précédentes, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}dt$ est convergente.

b) En utilisant la formule de linéarisation de $\sin^2(t)$, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}$ diverge.

Q5. Justifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(t)| \geq \sin^2(t)$.

Q6. En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ **n'est pas** absolument convergente.

Partie II- Calcul de la valeur de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cette partie est de montrer la formule

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}dt \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}dt$$

Q7. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n et J_n sont bien définies.

Q8. *Limite de J_n.*

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

b) En déduire que $\lim J_n$.

Q9. *Calcul de I_n.*

a) A l'aide de la formule d'Euler, montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin(a) - \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

b) Montrer que (I_n) est constante. *On étudiera $I_{n+1} - I_n$ en utilisant la question précédente.*

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{\pi}{2}$.

Q10. *Une fonction utile.*

a) Montrer que l'application $f :]0, \frac{\pi}{2}] \mapsto \frac{\sin(t)-t}{t\sin(t)}$ se prolonge par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et calculer $f'(t)$.

c) Étudier $\lim_{t\to 0^+} f'(t)$.

d) Montrer que $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe et vaut $\lim_{t\to 0^+} f'(t)$.

e) En déduire que f est dérivable en 0 et que f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Q11. Montrer que $J_n - I_n = \int_0^{\pi/2} f(t)\sin((2n+1)t)dt$.

Q12. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $J_n - I_n \to 0$.

Q13. En déduire la formule souhaitée.