

### DM 3 : Inspiré de CCINP 2018

Les parties I-1 et II-2 sont obligatoires.

Les parties I-2, II-2 et II-3 sont facultatives.

Dans tout le problème, les variables aléatoires sont définies sur un univers fini  $\Omega$  muni d'une probabilité  $\mathbb{P}$ .

#### Partie I- Quelques propriétés autour de la variance et de la covariance

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires réelles finies. On notera

- $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$  l'ensemble image de  $X$  et pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i).$$

- $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_p\}$  l'ensemble image de  $Y$  et pour  $i \in \{1, \dots, p\}$ ,

$$q_i = \mathbb{P}(Y = y_i).$$

- Pour  $(i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$ , on note

$$r_{ij} = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

#### I.1- Quelques généralités

**Q1.**  $X$  et  $Y$  doivent être indépendantes.

**Q2.** On utilise la linéarité de l'espérance pour développer le calcul en se rappelant que  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{E}(Y)$  sont des constantes.

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) \\ &= \mathbb{E}(XY - \mathbb{E}(Y)X - \mathbb{E}(X)Y + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ &= \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \end{aligned}$$

**Q3.** C'est la formule de transfert :

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{i=1}^p q_i y_i^2$$

**Q4.** Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Les événements  $(Y = y_j)$  pour  $j = 1, \dots, p$  forment un système complet d'événements, on a donc

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^p \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = \sum_{j=1}^p r_{ij}$$

Dans la suite du problème, on note  $Z$  une variable aléatoire certaine égale à 1.

**Q5.**  $Z(\Omega) = \{1\}$  et  $\mathbb{P}(Z = 1) = 1$ .

**Q6.** Par la formule de transfert, on trouve immédiatement que  $\mathbb{E}(Z^2) = 1$ .

#### I.2- Une inégalité intéressante

**Q7.** Soit  $x, y \in \mathbb{R}$ . On a  $0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 - 2|x||y| + y^2$  d'où l'on tire

$$2|xy| \leq x^2 + y^2 \iff |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

**Q8.** Dans cette question, on admet le résultat suivant :

*Si  $Z$  et  $T$  sont deux variables aléatoires réelles finies telles que pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $|T(\omega)| \leq Z(\omega)$ , alors  $\mathbb{E}(T) \leq \mathbb{E}(Z)$ .*

On prend  $T = XY$  et  $Z = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$ . Puisque  $T(\omega) = X(\omega)Y(\omega)$ , on a bien  $|T(\omega)| \leq Z(\omega)$  et donc  $\mathbb{E}(T) \leq \mathbb{E}(Z)$  ce qui donne le résultat demandé par linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(XY) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2))$$

**Q9.** Avec  $Y = Z$ , on a  $XZ = X$  et donc

$$\mathbb{E}(X) = E(XZ) \leq \frac{1}{2}(\mathbb{E}(Z^2) + \mathbb{E}(X^2))$$

Comme  $\mathbb{E}(Z^2) = 1$ , on trouve bien

$$\mathbb{E}(X) \leq \frac{1}{2}(1 + \mathbb{E}(X))$$

### Partie II- Étude de la matrice de covariance

Dans cette partie, on considère trois variables aléatoires réelles finies  $V_1, V_2$  et  $V_3$ . On définit  $K$ , la **matrice de covariance** de  $V_1, V_2, V_3$ , comme étant la matrice carrée de taille 3 donnée par

$$K = \begin{pmatrix} \text{cov}(V_1, V_1) & \text{cov}(V_1, V_2) & \text{cov}(V_1, V_3) \\ \text{cov}(V_2, V_1) & \text{cov}(V_2, V_2) & \text{cov}(V_2, V_3) \\ \text{cov}(V_3, V_1) & \text{cov}(V_3, V_2) & \text{cov}(V_3, V_3) \end{pmatrix}.$$

**II.1- Étude d'un exemple - début.** Dans cette sous-partie, on suppose que les trois variables aléatoires  $V_1, V_2$  et  $V_3$  sont à valeurs dans  $\{0, 1\}$  et qu'elles vérifient les conditions suivantes : il existe  $p_1, p_2, p_3 \in ]0, 1[$  tels que  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$  et

$$\mathbb{P}((V_1 = i) \cap (V_2 = j) \cap (V_3 = k)) = \begin{cases} p_1 & \text{si } i = 0 \text{ et } j = k = 1 \\ p_2 & \text{si } j = 0 \text{ et } i = k = 1 \\ p_3 & \text{si } k = 0 \text{ et } i = j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q10.** On note  $A = (V_2 = 0) \cap (V_3 = 0)$ ,  $B = (V_2 = 0) \cap (V_3 = 1)$ ,  $C = (V_2 = 1) \cap (V_3 = 0)$ ,  $D = (V_2 = 1) \cap (V_3 = 1)$ .  $(A, B, C, D)$  forme un système complet d'événements, on a donc par la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(V_1 = 1) = \mathbb{P}((V_1 = 1) \cap A) + \mathbb{P}((V_1 = 1) \cap B) + \mathbb{P}((V_1 = 1) \cap C) + \mathbb{P}((V_1 = 1) \cap D)$$

On en utilisant alors les propriétés de  $V_1, V_2, V_3$ , on trouve que

$$\mathbb{P}(V_1 = 1) = 0 + p_2 + p_3 + 0 = 1 - p_1$$

Par suite, puisque  $V_1$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  c'est une variable de Bernoulli, de paramètre  $\mathbb{P}(V_1 = 1) = 1 - p_1$ .

Les rôles de  $V_1, V_2$  et  $V_3$  étant symétriques, on conclut de même pour  $V_2$  et  $V_3$ .

**Q11.** C'est du cours : par la formule de Konig-Huyghens,

$$\mathbb{V}(V_1) = \mathbb{E}(V_1^2) - \mathbb{E}(V_1)^2$$

Or,  $\mathbb{E}(V_1) = p_1 \times 0 + (1 - p_1) \times 1 = 1 - p_1$  et par la formule de transfert  $\mathbb{E}(V_1^2) = p_1 \times 0^2 + (1 - p_1) \times 1^2 = 1 - p_1$ . Donc

$$\mathbb{V}(V_1) = 1 - p_1 - (1 - p_1)^2 = (1 - p_1)(1 - (1 - p_1)) = p_1(1 - p_1).$$

**Q12.** On pose  $S = V_1 + V_2 + V_3$ . On note  $A_1 = (V_1 = 0) \cap (V_2 = 1) \cap (V_3 = 1)$ ,  $A_2 = (V_1 = 1) \cap (V_2 = 0) \cap (V_3 = 1)$  et  $A_3 = (V_1 = 1) \cap (V_2 = 1) \cap (V_3 = 0)$ .  $A_1, A_2$  et  $A_3$  sont deux à deux disjoints et  $\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = p_1 + p_2 + p_3 = 1$ . Il est clair que  $\mathbb{P}_{A_i}(S = 2) = 1$  pour  $i = 1, 2, 3$  puisque l'événement  $A_i$  implique l'événement  $S = 2$ . Par suite, en notant  $A_4 = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ ,  $\mathbb{P}(A_4) = 0$  et  $(A_1, A_2, A_3, A_4)$  forme un s.c.e. donc par la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S = 2) &= \mathbb{P}((S = 2) \cap A_1) + \mathbb{P}((S = 2) \cap A_2) + \mathbb{P}((S = 2) \cap A_3) + \mathbb{P}((S = 2) \cap A_4) \\ &= \mathbb{P}_{A_1}(S = 2) \times p_1 + \mathbb{P}_{A_2}(S = 2) \times p_2 + \mathbb{P}_{A_3}(S = 2) \times p_3 + 0 \\ &= p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{aligned}$$

Donc  $S$  suit la loi certaine égale à 2. On a notamment  $\mathbb{V}(S) = 0$ .

**Q13.**  $V_1 V_2$  est à valeurs dans  $\{0, 1\}$  donc c'est une variable de Bernoulli de paramètre  $\mathbb{P}(V_1 V_2 = 1)$ . En outre, pour que  $V_1 V_2 = 1$ , il faut que  $V_1 = 1$  et  $V_2 = 1$ , ce qui n'arrive que quand  $V_3 = 0$  et donc  $\mathbb{P}(V_1 V_2 = 1) = p_3$ .

Q14.

$$\begin{aligned} \text{cov}(V_1, V_2) &= \mathbb{E}(V_1 V_2) - \mathbb{E}(V_1)\mathbb{E}(V_2) \\ &= p_3 - (1 - p_1)(1 - p_2) \\ &= 1 - p_1 - p_2 - (1 - p_1 - p_2 + p_1 p_2) = \boxed{-p_1 p_2} \end{aligned}$$

Q15. Puisque  $V_1, V_2, V_3$  jouent des rôles symétriques, on trouve des formules analogues pour  $\text{cov}(V_1, V_2) = \text{cov}(V_2, V_1) = -p_1 p_2$ ,  $\text{cov}(V_2, V_3) = \text{cov}(V_3, V_2) = -p_2 p_3$ ,  $\text{cov}(V_1, V_3) = \text{cov}(V_3, V_1) = -p_3 p_1$ . On rappelle en outre que  $\text{cov}(V_i, V_i) = \mathbb{V}(V_i)$ . Donc on a bien

$$K = \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1 p_2 & -p_1 p_3 \\ -p_1 p_2 & p_2(1 - p_2) & -p_2 p_3 \\ -p_1 p_3 & -p_2 p_3 & p_3(1 - p_3) \end{pmatrix}.$$

II.2- Etude d'un exemple - suite. On considère toujours l'exemple de la sous-partie précédente.

Q16. On vérifie sans mal que  $K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$  donc  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker K$ .

Q17. On commence par diviser la colonne  $j$  par  $p_j$  pour  $1 \leq j \leq 3$ , ce qui donne

$$K \sim_C \begin{pmatrix} p_1 - 1 & p_1 & p_1 \\ p_2 & p_2 - 1 & p_2 \\ p_3 & p_3 & p_3 - 1 \end{pmatrix}$$

On fait alors les opérations  $C_1 \leftarrow C_1 - C_3$  et  $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$  et l'on trouve

$$K \sim_C \begin{pmatrix} -1 & 0 & p_1 \\ 0 & -1 & p_2 \\ 1 & 1 & -(p_1 + p_2) \end{pmatrix}$$

où on a utilisé en bas à droite que  $p_1 + p_2 = 1 - p - 3$ . On fait enfin,  $C_3 \leftarrow C_3 + p_1 C_1 + p_2 C_2$  et l'on a

$$K \sim_C \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,  $\text{rg}(K) = 2$  et  $\dim \ker K = 1$  par le théorème du rang. Connaissant déjà un vecteur de  $\ker K$ , on a

$$\ker K = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Q18. On suppose dans cette question que  $p_2 = p_3 = p$ .

a) Dans ce cas, on a  $p_1 = 1 - 2p$  et  $1 - p_1 = 2p$  d'où

$$K = \begin{pmatrix} 2p(1 - 2p) & 0 & (2p - 1)p \\ (2p - 1)p & p(1 - p) & -p^2 \\ (2p - 1)p & -p^2 & p(1 - p) \end{pmatrix}$$

b)  $K - pI_3 = \begin{pmatrix} p - 4p^2 & 0 & (2p - 1)p \\ (2p - 1)p & -p^2 & -p^2 \\ (2p - 1)p & -p^2 & -p^2 \end{pmatrix}$ . On peut calculer le déterminant en développant par rapport à la 2ème colonne et on trouve qu'il vaut 0 donc

$K - pI_3$  n'est pas inversible.

c) On  $\text{tr}(K) = 2p(1 - 2p) + p(1 - p) + p(1 - p) = 2p(1 - 2p + (1 - p)) = 2p(2 - 3p) = \boxed{4p - 6p^2}$ .

II.3- Retour au cas général On revient au cas général :  $V_1, V_2$  et  $V_3$  sont trois variables aléatoires réelles finies quelconques.

Q19.  $(K^T)_{ij} = K_{ji} = \text{cov}(V_j, V_i) = \text{cov}(V_i, V_j) = K_{ij}$  donc  $K$  est symétrique.

Q20. Soit  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . On utilise la bilinéarité de cov pour obtenir le résultat.

Q21. C'est un produit de matrices à écrire.

Q22. Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $X \in \mathbb{R}^3$  non nul tel que  $KX = \lambda X$ . On a  $0 \leq X^T K X = X^T \lambda X = \lambda(X^T X)$ . Or,  $X^T X = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$  donc  $\lambda \geq 0$ .