AL3 - Déterminants

Calculs de déterminants

1 -Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ -8 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2 - Calculer, en fonction du paramètre x, les déterminants des matrices suivantes et préciser pour quelle(s) valeur(s) de x ces matrices sont inversibles.

$$\begin{pmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 6 & x-3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & x^2 & x^4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & x+1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{pmatrix}$$

3 - Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & (0) & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a+b & a & \cdots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \cdots & a & a+b \end{vmatrix}$$

4 -*Matrice compagnon.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$. On note $C(a_0, \dots, a_{p-1})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

Pour $x \in \mathbb{K}$, on veut calculer le déterminant $\det(xI_p - C(a_0, \dots, a_{p-1}))$.

1. Exprimer $\det(xI_p - C(a_0, \dots, a_{p-1}))$ en fonction de $\det(xI_{p-1} - C(a_1, \dots, a_{p-1}))$.
2. En déduire par récurrence sur p que

$$\det(xI_p - C(a_0, \dots, a_{p-1})) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + x^p$$

5 -Soit $a \in \mathbb{R}$. On note Δ_n le déterminant suivant :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & a & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \\ n-1 & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

1. Calculer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}.
2. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a $\Delta_n = a^n - a^{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2$. On pourra faire un raisonnement par récurrence.

Déterminant dune famille de vecteurs

6 -*Interprétation géométrique du* det

1. Calculer l'aire du parallélogramme porté par $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Calculer le volume du parallélépipède porté par

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

7 -Soit $m \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de m les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ suivants forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}.$$

Déterminant d'endomorphismes

8 **-** Soit u l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = XP' + P(1)$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer $\det(u)$.
3. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?

9 **-**Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $f(M) = M - \operatorname{tr}(M)I_2$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer $\det(f)$.
3. f est-il un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercices théoriques

10 **-** *Questions indépendantes.*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair et $A \in A_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) = 0$.
2. Soient n un entier et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.
3. Soient p un entier et $B, C \in GL_p(\mathbb{K})$ telles que $BC + CB = 0$. Montrer que p est pair.

11 ★ **-** *Déterminants par blocs.* Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ est une matrice dite par blocs.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{vmatrix} = \det(A).$$

On pourra raisonner par récurrence sur p et développer ce déterminant par rapport à la dernière ligne.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $\begin{vmatrix} I_n & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(C)$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$
   a) Montrer que $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$.
   b) En déduire que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D)$.

12 ★ **-** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{R}^n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_n$. On notera f l'endomorphisme de E canoniquement associé à la matrice A.

1. Montrer que l'existence d'une telle matrice implique la parité de n.

On suppose dans la suite que $\boxed{n = 4}$.

2. Montrer que pour tout $x \in E$ non nul, les vecteurs x et $f(x)$ sont linéairement indépendants.
3. Soit x_1 un vecteur non nul. Montrer que $F = \operatorname{Vect}(x_1, f(x_1))$ est stable par f.
4. Soit $x_2 \in E$ tel que $x_2 \notin F$. Montrer que $F \cap \operatorname{Vect}(x_2, f(x_2)) = \{0\}$.
5. En déduire que $\mathcal{B} = (x_1, f(x_1), x_2, f(x_2))$ est une base de E.
6. Écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
7. Calculer $\det(f)$.

13 **-** *Déterminant de Vandermonde.* Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On note

$M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice, dite de Vandermonde, suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On note enfin $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. On souhaite montrer par récurrence sur n que

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (\alpha_i - \alpha_j) \tag{1}$$

1. En admettant cette formule un instant, donner une condition nécessaire et suffisantes sur $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ pour que la matrice $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit inversible.

2. Soit X un indéterminée. On note $P(X) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X)$.

   a) Justifier que P est un polynôme de degré $n-1$ et donner son coefficient dominant en fonction de $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$.

   b) Factoriser P.

   c) En déduire une preuve de la formule (1).