DM 4 : Autour l'intégrale de Dirichlet

La partie I est obligatoire.

La partie II est facultative.

Partie I- Nature de l'intégrale - OBLIGATOIRE

Q1. La fonction $\frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$. On sait que $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}=1$ donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}dt$ est $\boxed{\text{faussement impropre en 0}}$ et donc $\boxed{\text{converge}}$.

Q2.

a) Soit $R>1$. Montrer que

$$\int_1^R \frac{\sin(t)}{t}dt = \cos(1) - \frac{\cos(R)}{R} - \int_1^R \frac{\cos(t)}{t^2}dt$$

Il s'agit simplement d'une $\boxed{\text{intégration par parties}}$ sur $[1,R]$ pour deux fonctions u et v de classe C^1, avec $u(t)=-\cos(t)$, $u'(t)=\sin(t)$, $v(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=-\frac{1}{t^2}$.

b) La fonction $\frac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On regarde en valeur absolue : $\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2}$. $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge (intégrale de Riemann) donc, $\boxed{\text{par comparaison de fonctions à valeurs positives}}$, $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos(t)}{t^2}\right|dt$ converge. $\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}dt \text{ est } \textbf{absolument} \text{ convergente}}$.

c) Puisque l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(t)}{t^2}dt$ converge absolument, elle converge. Ainsi,

$$\lim_{R\to+\infty}\int_1^R \frac{\cos(t)}{t^2}$$

existe. Par suite, puisque $\lim_{R\to 0}\frac{\cos(R)}{R}=0$, on en déduit que $\lim_{R\to+\infty}\int_1^R\frac{\sin(t)}{t}dt$ converge grâce à la formule de la question a. Finalement, $\boxed{\int_1^{\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt \text{ converge.}}$

Q3. La fonction $\frac{sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. Il faut alors s'intéresser aux problèmes de convergence de l'intégrale en 0 et $+\infty$. La question 1 règle le problème en 0 et la question 2 règle le problème en $+\infty$ donc on peut dire que $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt \text{ est convergente}}$.

Q4. Nature de $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)^2}{t}dt$.

a) Soit $R>0$, on fait l'intégration par parties suivante :

$$\int_1^R \frac{\cos(2t)}{t}dt = \frac{\sin(2R)}{2R} - \frac{\sin(2)}{2} + \int_1^R \frac{\sin(2t)}{2t^2}dt$$

Pour les mêmes raisons qu'en 2.b, $\int_1^R \frac{\sin(2t)}{2t^2}dt$ existe car $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(2t)}{2t^2}dt$ est absolument convergente (donc convergente). Par suite, la limite quand $R\to+\infty$ de $\int_1^R\frac{\cos(2t)}{t}dt$ existe et donc $\boxed{\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2t)}{t}dt \text{ est convergente.}}$

b) On sait que pour $t\in\mathbb{R}$, $\sin^2(t)=\frac{-\cos(2t)+1}{2}$. Si $R>0$, on a

$$\int_1^R \frac{\sin^2(t)}{t} = -\frac{1}{2}\int_1^R\frac{\cos(2t)}{t}dt + \int_1^R\frac{1}{2t}dt$$

La première intégrale converge mais la deuxième vaut $\frac{1}{2}\ln(R) \to +\infty$ donc $\boxed{\text{l'intégrale } \int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt \text{ diverge.}}$

Q5. Si $t\in\mathbb{R}$, $\sin(t)\in[-1,1]$ donc $\boxed{\sin^2(t)\leq|\sin(t)|.}$

Q6. Par comparaison de fonctions à valeurs positives, puisque $\frac{\sin^2(t)}{t}\leq\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|$, et que $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}dt$ diverge, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(t)}{t}\right|dt$ diverge et donc $\boxed{\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt \textbf{ n'est pas} \text{ absolument convergente.}}$

Partie II- Calcul de la valeur de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cette partie est de montrer la formule

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduite les intégrales

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \text{ et } J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les fonctions $f_n : t \in]0,1] \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}$ et $g_n : t \in]0,1] \mapsto \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ sont continues et admettent la même limite finie en 0 $(2n+1)$ donc $\boxed{\text{les intégrales sont faussement impropres en 0 et existent.}}$

Q8. *Limite de J_n.*

a) Il s'agit de faire le chagneemnt de variavle $u = (2n+1)t$ avec $\frac{dt}{t} = \frac{du}{u}$ et l'on obtient directement que $\boxed{J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt}$.

b) On a donc évidemment $\boxed{\lim J_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt}$.

Q9. *Calcul de I_n.*

a)

$$\begin{aligned}\sin(a) - \sin(b) &= \mathrm{Im}(e^{ia} - e^{ib}) = \mathrm{Im}(e^{i(a+b)/2}(e^{i(a-b)} - e^{i(b-a)}) \\ &= \mathrm{Im}(2i\sin((a-b)/2e^{i(a+b)/2}) = \boxed{2\cos((a+b)/2)\sin((a-b)/2)}\end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+3)t) - \sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\pi/2} 2\frac{\sin(t)\cos((n+2)(t)}{\sin(t)} dt \\ &= 2\int_0^{\pi/2} 2\cos((n+2)t) dt \\ &\frac{2}{n+2}[\sin((n+2)t)]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n+2}(\sin(n\pi/2+\pi) - \sin(0)) = 0\end{aligned}$$

Donc $\boxed{I_{n+1} = I_n}$.

c) Puisque (I_n) est constante, $I_n = I_0 = \int_0^{\pi/2} 1 dt = \boxed{\frac{\pi}{2}}$.

Q10. *Une fonction utile.*

a) On a $\sin(t) - t =\sim -\frac{t^3}{6}$ et $t\sin(t) \sim t^2$ donc $f(t) \sim -\frac{t}{6} \to 0$ quand $t \to 0$. Donc $\boxed{f \text{ se prolonge par continuité en 0 avec } f(0) = 0}$.

b) f est le quotient de deux applications de classe C^1 avec un dénominateur qui ne s'annule pas donc f est C^1 sur $]0, \frac{\pi/2}{]}$. On a alors

$$f'(t) = \frac{(\cos(t)-1)t\sin(t) - (\sin(t)-t)(\sin(t)+t\cos(t))}{t^2\sin^2(t)}.$$

c) Le dénominateur est équivalent) t^4. On fait un développement limité au numérateur :à l'ordre 4 :

$$\begin{aligned}&(\cos(t)-1)t\sin(t) - (\sin(t)-1)(\sin(t)+t\cos(t)) \\ &= (-\frac{t^2}{2} + o(t^2))(t^2 + o(t^2) - (-\frac{t^3}{6} + o(t^4))(t + o(t^2) + t + o(t^2)) \\ &= -\frac{t^4}{2} + o(t^4) + \frac{t^4}{3} + o(t^4) = -\frac{t^4}{6} + o(t^4) \sim -\frac{t^4}{6}\end{aligned}$$

On en déduit que $f'(t) \sim -\frac{1}{6}$ donc $\lim_{t\to 0^+} f'(t) = -\frac{1}{6}$.

d) On avait déjà vu $f(t) \sim -\frac{t}{6}$ donc $f(t)/t \to -\frac{1}{6}$. D'où l'égalité des limites.

e) Le taux d'accroissement $\frac{f(t)-f(0}{t} = \frac{f(t)}{t}$ possède ne limite en 0 donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{6}$. En outre, f' est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et elle est aussi continue en 0 puisque $\lim_{t\to 0} f'(t) = f'(0)$. Donc f est de classe C^1 sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Q11. Puisque $\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = f(t)$, il est clair, par linéarité de $\int$ que $\boxed{J_n - I_n = \int_0^{\pi/2} f(t)\sin((2n+1)t) dt}$.

Q12. C'est en fait le lemme de Riemann-Lebesgue. Voir démo du chapitre AL2.

Q13. On a finalement $\lim I_n - J_n = 0 = \frac{\pi}{2} - \lim J_n$ d'où

$$\lim J_n = \boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}}$$