DM 5 : Déterminants de Vandermonde

La partie I est obligatoire.

La partie II est facultative.

Partie I- Des calculs de déterminants de Vandermonde en dimension 2, 3 et 4

Q1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

Q2. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Soit $x \in \mathbb{C}$. Calculer $\det(xI_2 - A)$.

b) En déduire les valeurs de x pour lesquelles $xI_2 - A$ **n'est pas inversible.**

Q3. Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

a) Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ soit inversible ?

Q4. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $\det M(a,b,c) = (b-a)(c-b)(c-a)$.

b) En déduire que $M(a,b,c)$ est inversible si et seulement si a, b, c sont deux à deux distincts.

Q5. Une application : on considère le nombre complexe $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

a) Écrire j sous forme algébrique.

b) Justifier que $j^3 = 1$. Que vaut j^4 ?

c) En utilisant le résultat de la question 4, justifier que M est inversible.

d) Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.

e) En utilisant la question 4a), montrer que $\det(M) = (1-j)^3$.

Partie II- Cas général

Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On note $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ la matrice, dite de Vandermonde, suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

On note enfin $V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(M(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$. On souhaite montrer par récurrence sur n que

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (\alpha_i - \alpha_j) \tag{1}$$

Q6. En admettant cette formule un instant, donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pour que la matrice $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit inversible.

Q7. Soit X un indéterminée. On note $P(X) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, X)$.

a) Justifier que P est un polynôme de degré $n-1$ et donner son coefficient dominant en fonction de $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$.

b) Factoriser P dans le cas où les α_i sont deux à deux distincts.

c) En raisonnant par récurrence sur n, en déduire une preuve de la formule (1).

Q8. Application : Soin $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, qui est une racine n-ième de l'unité. On introduit la matrice suivante

$$\Omega_n = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

C'est la matrice de la transformée de Fourier discrète.

a) En utilisant la Question 6, justifier que Ω_n est inversible.

b) On note $\overline{\Omega_n}$ la matrice obtenue en prenant les conjugués de tous les coefficients de Ω_n. Montrer que $\Omega_n \overline{\Omega}_n^T = nI_n$.

c) En déduite l'inverse de Ω_n.