Programme de khôlle. Semaine 7

Description des thèmes

AL3 - Déterminants

1. Rappels de TSI1 :

   1) Déterminant d'une matrice carrée de taille 2.
      - Formule $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
      - Déterminant d'une famille de deux vecteurs. Interprétation de $det(u, v)$ comme l'aire du parallélogramme porté par u et v.
   2) Déterminant d'une matrice carrée de taille 3.
      - Formule $(u \wedge v) \cdot w$.
      - Calcul par la Règle de Sarrus.
      - Déterminant d'une famille de trois vecteurs. Interprétation de $\det(u, v, w)$ comme le volume du parallélépipède porté par u, v et w.

2. Déterminant d'une matrice carrée

   1) Définition du déterminant d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est l'unique application qui est
      (i) linéaire par rapport à chacune des colonnes.
      (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1.
      (iii) $\det(I_n) = 1$.
   2) Propriétés du déterminant.
      - $\det(\lambda I_n) = \lambda^n$ et $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Démontré.
      - $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0$. Admis.
      - $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Admis.
      - Corollaires démontrés : Deux matrices semblables ont même déterminant + si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
      - $\det(A^T) = \det(A)$. Admis. Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
   3) Déterminants simples.
      - Une matrice qui possède une colonne ou une ligne nulle a un déterminant nul.
      - Une matrice qui possède deux lignes ou deux colonnes égales a un déterminant nul. Idem si une ligne/colonne est multiple d'une autre ligne/colonne.
      - Le déterminant d'une matrice triangulaire/diagonale vaut le produit des coefficients diagonaux.

3. Calcul pratique de déterminants

   1) Par le pivot de Gauss.
      - Rappels : définition de deux matrices équivalentes en lignes/colonne et des opérations élémentaires. Toutes matrice carrée est équivalente en colonne (ou en ligne) à une matrice triangulaire. En effectuant l'algorithme du pivot de Gauss, on peut donc calculer un déterminant.

- $C_i \leftrightarrow C_j$ -> échanger deux colonnes (ou deux lignes) multiplie le déterminant par -1
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ -> ajouter un multiple d'une colonne à une autre colonne ne modifie pas le déterminant.
- Attention : $C_i \leftarrow \lambda C_i$: multiplier une colonne (ou une ligne) par λ multiplie le déterminant par λ.

2) Par développement par rapport à une ligne ou une colonne.
   - Formule du développement par rapport à la i-ième ligne ou la j-ième colonne.
   - Exemple : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots 0 & \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \dots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. Formule de récurrence entre Δ_{n+1}, Δ_n et Δ_{n-1}. Puis $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ par récurrence double.
3) Comparaison des deux méthodes. Méthode récursive adaptée s'il y a beaucoup de 0 sur une ligne ou une colonne. En général, nombre d'opérations en $O(n!)$. Méthode du pivot en $O(n^3)$.

4. Déterminant d'une famille de vecteurs.
   - Définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
   - Caractérisation des bases par le déterminant.
5. Déterminant d'un endomorphisme en dimension finie.
   - Définition du déterminant d'un endomorphisme dans une base.
   - Traduction sur le déterminant d'un endomorphisme des propriétés relatives au déterminant d'une matrice : caractérisation des automorphismes, $\det(f \circ g)$, $\det(f^{-1})$.
   - Exemples de calcul : $\det(u)$ où $u : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto \in (X-1)P' \in \mathbb{K}_n[X]$; $\det(f)$ où $f : A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec A quelconque.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants :

- **Panier 1** : **Propriétés théoriques du déterminant.**
  1. Montrer que deux matrices semblables ont même déterminant.
  2. Montrer que si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
  3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont deux bases de E,
  $$\det(Mat_{\mathcal{B}_1}(f)) = \det(Mat_{\mathcal{B}_2}(f))$$
- **Panier 2** : **Un calcul par récurrence**. On note $\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \dots 0 & \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \dots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.
  1. Calculer Δ_1 et Δ_2.
  2. Établir que pour tout $n \geq 3$,$\Delta_n = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$.
  3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$ par récurrence double
- **Panier 3** : On considère l'application $f : M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto AM \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est fixée. Montrer que $\det f = \det(A)^2$.
- **Panier 4** : **Exercice bilan.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application $f : P \in \mathbb{K}_n[X] \mapsto (X-1)P' \in \mathbb{K}_n[X]$
  1. Montrer que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $(X-1)P'(X) \in \mathbb{K}_n[X]$.
  2. Montrer que f est un endomorphisme.
  3. Calculer $\det(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$.
  4. f est-il inversible ?

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine. En vue du prochain chapitre sur la réduction, ne pas hésiter à poser des exercices du style :

A quelle condition sur $x \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) la matrice $xI_n - A$ est-elle inversible ?