DS 2*Durée : 4h*

- Le devoir sera rédigé sur des copies doubles avec un stylo de couleur noir ou bleu. D'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats. Ne pas utiliser de correcteur (=souris, blanco)
- Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction, ainsi qu'à l'orthographe.
- Indiquer le mot FIN à la fin de votre composition.
- *Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

Les calculatrices sont interdites.

N'abandonnez pas tant que vous n'avez pas lu toutes les questions du sujet. Pour traiter une question, vous pouvez admettre et utiliser le résultat d'une question précédente.

Pensez à mettre en valeur (souligner ou encadrer) vos résultats

Bon courage !

Deux sujets sont possibles :

- **Dans tous les cas, vous devez traiter l'exercice en commun.**
- Le sujet 1, qui s'adresse à la majeure partie de la classe. En plus de l'exercice commun, il est ensuite constitué de deux problèmes : Le problème 2, qui étudie une fonction définie à partir d'une intégrale, et le problème 3, qui s'intéresse à des marches aléatoires sur un carré. **Si vous choisissez le sujet 1, ne traitez pas le problème 4.**

- Le sujet 2, qui s'adresse aux élèves les plus ambitieux. En plus de l'exercice commun, il est ensuite constitué d'un unique problème (le problème 4) : la majeure partie du sujet CCS 2023 (Maths 1) sur la transformée de Laplace. **Si vous choisissez le sujet 2, ne traitez pas les problèmes 2 et 3.**

Vous indiquerez clairement au début de votre copie le sujet choisi.

Si vous indiquez le sujet 1 (resp. 2) et que vous répondez à quelques questions du problème 4 (resp. 2 ou 3), ces questions ne seront pas corrigées.

Exercice 1. Exercice en commun.

Peu importe le sujet choisi, vous commencerez par traiter l'exercice 1.

Partie I- Une famille de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme suivant

$$P_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

qui est donc obtenu en dérivant n fois le polynôme $(X^2 - 1)^n$.

Q1. Calculer P_0, P_1 et P_2 .

Q2. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$. On pourra commencer par calculer $\deg(P_n)$.

Q3. Dans cette question, on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on admet que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathcal{B}$.

Partie II- Un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

On considère l'application

$$\Phi : P(X) \in \mathbb{R}[X] \mapsto ((1 - X^2)P'(X))' \in \mathbb{R}[X]$$

Q4. Vérifier que l'on a pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\Phi(P)(X) = (1 - X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

Q5. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Q6. Calculer $\Phi(Q)$ si $Q(X) = X$.

Q7. Montrer que $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker \Phi$.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ .

Partie III- L'endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$

Puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par Φ , on peut considérer l'endomorphisme f induit par Φ sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$f : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto ((1 - X^2)P'(X))' \in \mathbb{R}_2[X]$$

Q9. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Q10. En déduire $\text{tr}(f)$ et $\det(f)$.

Q11. Calculer $\Phi(P_0)$, $\Phi(P_1)$ et $\Phi(P_2)$.

Q12. En déduire la matrice de f dans la base (P_0, P_1, P_2) .

Problème 2. Une fonction définie à partir d'une intégrale. CCINP 2023.

Présentation générale

Ce problème traite de l'étude d'une fonction définie par une intégrale. De telles fonctions apparaissent dans de nombreux domaines d'application : automatique, traitement du signal, etc.

On s'intéressera en particulier au calcul de certaines des valeurs de cette fonction, à ses variations, ainsi qu'à son comportement asymptotique.

Partie I- Définition de la fonction

Q1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 t^\alpha dt$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α .

Q2. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+ , de la fonction définie sur $]0, 1]$ par $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{1+t}$.

Q3. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ converge si et seulement si $x > 0$.

On définit alors sur $]0, +\infty[$ la fonction f par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$$

La suite du problème a pour but d'étudier certaines propriétés de la fonction f .

Partie II- Calcul de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Q4. Montrer que $f(1) = \ln(2)$, puis que $f(2) = 1 - \ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$1 - \frac{1}{1+t} = \frac{t}{1+t}.$$

Q5. Rappeler la formule de factorisation de $a^n - b^n$, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire que, pour tout $t \in [0, 1]$, $n \geq 1$:

$$1 - (-t)^n = (1 + t) \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k$$

Q6. En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$:

$$f(n) = (-1)^{n-1} \ln(2) + (-1)^n \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{1}{k+1}$$

On pourra remarquer que, pour $n \geq 2$ et $t \in [0, 1]$: $t^{n-1} = (-1)^{n-1} (-t)^{n-1}$.

Q7. Écrire une fonction python d'en-tête `def fEntier(n)` : qui calcule $f(n)$ à partir de la formule obtenue dans la question précédente et renvoie la valeur de $f(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

On supposera la fonction `log` (pour $\ln$) importée de la bibliothèque `numpy`.

Partie III- Variations de f

Q8. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Q9. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leq \beta$. Comparer, pour tout $t \in]0, 1]$, t^α et t^β .

En déduire que f est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q10. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0, 1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}.$$

En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

Q11. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

Q12. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On placera en particulier les points de cette courbe d'abscisses 1 et 2 (on donne $\ln(2) \simeq 0,7$).

Partie IV- Équivalent de f en $+\infty$

Q13. Montrer que, pour $x \in]0, +\infty[$:

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}.$$

Q14. En utilisant le résultat de la question **Q24**, montrer que, pour $x > 1$:

$$f(x+1) + f(x) \leq 2f(x) \leq f(x) + f(x-1).$$

Q15. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.

Problème 3. Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$. CCINP 2021.

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour X une variable aléatoire sur Ω , on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.

On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbb{P})$ suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\}, \quad \mathbb{P}(X = -1) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I- Marche aléatoire sur un carré

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.1- Rotations du plan. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Q1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, calculer $f_\theta(x, y)$.

Q2. Calculer $R_\theta R_{-\theta}$. En déduire que R_θ est inversible et exprimer son inverse.

A partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Q3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'affixe correspondante de $f_\theta(x, y)$ est $e^{i\theta}(x + iy)$.

Pour la suite de cette partie, on admet que l'application f_θ est l'endomorphisme de rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine, et qu'elle est représentée par l'application complexe $r_\theta : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z) = e^{i\theta}z \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

I.2- Racines n -ièmes de l'unité. Dans cette sous partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n -ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$. On note pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $\omega_k = \exp(\frac{2k\pi}{n}i)$.

Q4. Dans le cas où $n = 4$, donner la forme algébrique de $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ et ω_3 .

Q5. Montrer que $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$ sont précisément les racines n -ièmes de l'unité.

Q6. Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n-2\}$, on a : $r_{2\pi/n}(\omega_k) = \omega_{k+1}$. Que vaut $r_{2\pi/n}(\omega_{n-1})$?

I.3- Marche aléatoire sur un carré. Dans cette sous-partie, le plan est assimilé à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$. On s'intéresse à une boussole centrée en 0 dont l'aiguille peut indiquer l'une des quatre directions : Est (affixe 1), Nord (affixe i), Ouest (affixe -1) et Sud (affixe $-i$).

On suppose que lorsque l'aiguille se trouve en l'un des quatre points précédents à une étape, elle tourne d'un angle $\pi/2$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ dans le sens trigonométrique ou elle tourne d'un angle $\pi/2$ avec probabilité $\frac{1}{2}$ dans le sens inverse. D'une étape sur l'autre, elle ne peut donc pas rester sur place.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on étudie le déplacement de l'aiguille de l'étape n à l'étape $n+1$ et on note A_n la variable aléatoire qui indique l'affixe de l'aiguille de la boussole à l'étape n . Ainsi, A_n prend ses valeurs dans $\{1, i, -1, -i\}$.

On admet que les résultats du cours pour les variables aléatoires à valeurs réelles

le sont aussi pour les variables aléatoires à valeurs complexes. On pourra donc les utiliser pour les variables A_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note aussi D_n la variable aléatoire qui vaut $+1$ si la boussole tourne dans le sens trigonométrique entre l'étape n et l'étape $n+1$ et -1 dans le sens inverse. De ce fait, D_n suit une loi de Rademacher.

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n$.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la variable D_n et le fait que $[(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)]$ est un système complet d'événements de Ω , justifier que :

$$\mathbb{P}(A_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n = i) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n = -i).$$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sans justifier, exprimer avec des formes analogues $\mathbb{P}(A_{n+1} = i), \mathbb{P}(A_{n+1} = -1)$ et $\mathbb{P}(A_{n+1} = -i)$.

On note la matrice M et le vecteur u suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Q10. Calculer $\text{rg}(M)$. La matrice M est-elle inversible ?

Q11. Déterminer une base puis la dimension de $\ker(M + I_4)$.

Q12. Calculer Mu . La matrice $M - I_4$ est-elle inversible ?

On considère la matrice colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n = 1) \\ \mathbb{P}(A_n = i) \\ \mathbb{P}(A_n = -1) \\ \mathbb{P}(A_n = -i) \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est et donc que $U_0 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$. Sans mener de calculs, expliquer la démarche et les formules que l'on peut utiliser pour calculer en fonction de n les probabilités $\mathbb{P}(A_n = 1), \mathbb{P}(A_n = i), \mathbb{P}(A_n = -1)$ et $\mathbb{P}(A_n = -i)$.

Partie II- A propos des lois de Rademacher

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Rademacher.

Q13. Montrer que $\mathbb{E}(X) = 0$.

Q14. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = V(X) = 1$.

Dans la suite, on considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

Q15. Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ différents ($i \neq j$). Montrer que $\mathbb{E}(X_i X_j) = 0$.

Pour $i = 1, \dots, n$, on note $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$.

Q16. Quelle est la loi de Y_i ?

Q17. On note $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. Déterminer la loi de Y .

Problème 4. Transformation de Laplace. CCS 2023/Maths 1.

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions et l'applique à la résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Notations

- On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs complexes.

On admet que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$ -espaces vectoriels.

- Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-pt} dt$ converge. On admet que E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

Articulation des parties

Le résultat de la partie I est utilisé dans les parties II et III. Certains résultats de la partie II sont utilisés dans la partie IV. Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I- Question préliminaire

Q1. Démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées :

Si u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t)v(t))$ existe, alors les intégrales $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ et $\int_0^{+\infty} w(t)v'(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence,

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$$

où $[u(t)v(t)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0)$.

Partie II- Transformée de Laplace, généralités

II.1-

Q2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

On définit ainsi une fonction F , définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Q3. Démontrer que l'application

$$\mathcal{L} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto F \end{cases}$$

est linéaire.

$\mathcal{L}$ s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f

II.2- Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

II.B.1) Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.

On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$

Q5. Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.

Q7. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

II.B.2) Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b , on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto e^{-at+ibt}$.

Q8. Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.

Q9. En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at} \cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto e^{-at} \sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.

II.B.3)

Q10. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E .

Q11. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'appartenant pas à E .

II.3- Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée secondes

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}^+$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-pt} = 0$.

Q12. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

On suppose, en plus, que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^+$, que $f'' \in E$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t)e^{-pt} = 0$.

Q13. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

Partie III- Approximation de fonctions de classe e^1 sur un segment par des fonctions polynomiales

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \right) = 0$

III.1- Une famille de fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $B_n^k : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \rightarrow \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{cases}$, où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial k parmi n .

Q14. Donner le degré de B_n^k .

Q15. Pour tout $t \in [0, 1]$, calculer $\sum_{k=0}^n B_n^k(t)$.

III.2- Deux résultats généraux

Q16. Montrer que, si Z est une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(Z) \geq 0$. En déduire que, si X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Q17. *Question de cours.* X étant une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, rappeler la définition de sa variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et démontrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Q18. En déduire que $|\mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

III.3- Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in [0, 1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, t) . On pose $X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)$.

Q19. Rappeler la valeur de l'espérance de S_n ainsi que sa variance.

Q20. En déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = \frac{t(1-t)}{n}$.

Q21. En citant de manière explicite les théorèmes utilisés, montrer qu'il existe $M_\varphi \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2, \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M_\varphi |b - a|.$$

Q22. En utilisant les résultats des questions Q18, Q21 et Q16 puis Q20 montrer que

$$|\mathbb{E}(X_n)| \leq \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}$$

Q23. En citant le théorème utilisé, en déduire que, pour tout nombre réel $t \in [0, 1]$,

$$\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t) \right| \leq M_\varphi \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

Q24. Justifier que la fonction

$$w : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto t(1-t) \end{cases}$$

admet un maximum et déterminer la valeur de ce maximum.

Q25. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \geq 1}$ telle que la suite

$$\left(\sup_{t \in [0, 1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \right)_{n \geq 1}$$

converge vers 0.

On admet que ce résultat, démontré dans le cas où la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$, est encore valable lorsque la fonction φ est seulement continue sur $[0, 1]$. Ce dernier résultat sera utilisé dans la partie IV.

Partie IV- Injectivité de la transformation de Laplace et applications

IV.1- On se propose dans cette sous-partie de démontrer que l'application $\mathcal{L}$ est injective sur E , c'est-à-dire que

$$\forall (y_1, y_2) \in E^2, \quad \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) \implies y_1 = y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f) = 0$.

Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s} ds$.

Q26. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

Q27. Montrer que g est une fonction bornée.

Q28. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0 < u \leq 1, \\ \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt & \text{si } u = 0. \end{cases}$

Q29. Montrer que φ est continue sur le segment $[0, 1]$.

Q30. En effectuant le changement de variables $t = -\ln u$ et en citant explicitement le théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1} du$$

Q31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \varphi(u)u^n du = 0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)dt = 0.$$

Q32. En utilisant le résultat admis à la fin de la partie III, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi^2(t)dt \right) = 0$$

Q33. En déduire que $f = 0$.

Q34. Démontrer que $\mathcal{L}$ est injective.

IV.2- Le but de cette sous-partie est de résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, & y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0; \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

IV.B.1) Résolution classique

Q35. Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'équation $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1$ de la forme $y(t) = at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Q36. Résoudre alors le problème (IV.1).

IV.B.2) Résolution utilisant la transformation de Laplace

On suppose que y est une solution du problème (IV.1) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie II.C.

Q37. Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $(p^2 + 2p + 2) \mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2}$.

Q38. Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p+1)^2+1}.$$

Q39. En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de $\mathcal{L}$ et les résultats de la sous-partie II.B.

Q40. Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème (IV.1).