DS 2

Durée : 4h

Exercice 1. Exercice en commun.

Peu importe le sujet choisi, vous commencerez par traiter l'exercice 1.

Partie I- Une famille de polynômes

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère le polynôme suivant

$$P_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}.$$

qui est donc obtenu en dérivant n fois le polynôme $(X^2-1)^n$.

Q1. On a

$$\begin{aligned} \boxed{P_0 = 1} \\ P_1 = (X^2-1)' = \boxed{2X} \\ P_2 = ((X^2-1)^2)'' = (X^4-2X^2+1)'' = \boxed{12X^2-4} \end{aligned}$$

Q2. Soit $\deg(P_n) = \deg((X^2-1)^n) - n = 2n - n = n$. Par un résultat du cours, la famille (P_n) forme donc une base de $\mathbb{R}[X]$.

Q3. Dans cette question, on se place dans $\mathbb{R}_2[X]$ et on admet que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On cherche donc $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(X) = xP_0(X) + yP_1(X) + zP_2(X) = x + 2yX + 12zX^2 - 4z$$

On a donc $a = 12z$, $2y = b$ et $x - 4z = c$ ce qui donne finalement comme coordonnées

$$\boxed{(x, y, z) = \left(c - \frac{a}{3}, \frac{b}{2}, \frac{a}{12}\right)}$$

Partie II- Un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$

On considère l'application

$$\Phi : P(X) \in \mathbb{R}[X] \mapsto \left((1-X^2)P'(X)\right)' \in \mathbb{R}[X]$$

Q4. Il s'agit d'appliquer la formule de Leibniz, sachant que $(1-X^2)' = -2X$. On a donc bien

$$\Phi(P)(X) = (1-X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

Q5. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \Phi(P+\lambda Q) &= (1-X^2)(P+\lambda Q)''(X) - 2X(P+\lambda Q)'(X) \\ &= (1-X^2)(P'' + \lambda Q'') - 2X(P' + \lambda Q') \\ &= \Phi(P) + \lambda\Phi(Q) \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la linéarité de la dérivation. Ceci prouve que Φ est un endomorphisme.

Q6. $Q(X) = X$. $Q'(X) = 1$ et $Q''(X) = 0$ donc $\boxed{\Phi(Q)(X) = -2X}$.

Q7. Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. $P' = 0$ donc $\Phi(P) = 0$ ce qui prouve que $P \in \ker \Phi$ et donc $\boxed{\mathbb{R}_0[X] \subset \ker \Phi}$.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrons que $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On calcule le degré de $\Phi(P)$ sachant que $\deg(P) \leq n$.

$$\deg(\Phi(P)) = \deg((1-X^2)P')) - 1 = 2 + \deg(P') - 1 = 2 + (\deg(P) - 1) - 1 = \deg(P) \leq n$$

Donc $\boxed{\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]}$. Ceci prouve que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Φ.

Partie III- L'endomorphisme sur $\mathbb{R}_2[X]$

Puisque $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par Φ, on peut considérer l'endomorphisme f induit par Φ sur $\mathbb{R}_2[X]$:

$$f : P \in P(X) \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto \left((1-X^2)P'(X)\right)' \in \mathbb{R}_2[X]$$

Q9. On calcule $f(1) = 0$, $f(X) = -2X$ et $f(X^2) = (1-X^2)2 - 2X \times 2X = 2 - 2X^2 - 4X^2 = 2 - 6X^2$. La matrice demandée est donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}}$$

Q10. La trace et le déterminant de f sont ceux de la matrice ci-dessus donc $\boxed{\mathrm{tr}(f) = -8 \text{ et } \det(f) = 0}$.

Q11. $P_0 = 1$ donc $\Phi(P_0) = 1 = P_0$.
$P_1 = 2X$ donc $\Phi(P_1) = -4X = -2P_1$.
$P_2 = 12X^2 - 4$ donc on a

$$\Phi(P_2) = (1-X^2)(24) - 2X(24X) = 24(1 - X^2 - 2X^2) = 24(-3X^2 + 1) = -6(12X^2 - 4) = -6P_2$$

Q12. La matrice demandée est donc

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Problème 2. Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,1\}$. CCINP 2021.

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathbb{P})$. Pour X une variable aléatoire sur Ω, on note $X(\Omega)$ l'ensemble de ses valeurs.

On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega,\mathbb{P})$ suit une loi de Rademacher lorsque :

$$X(\Omega)=\{-1,1\},\quad \mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2},\quad \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{2}.$$

Les deux parties sont indépendantes.

Partie I- Marche aléatoire sur un carré

Dans cette partie, le plan usuel $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé direct.

I.A- Rotations du plan. Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On note $f_\theta:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$R_\theta=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

Q1. Pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f_\theta(x,y)=(\cos(\theta)x+\sin(\theta)y,-\sin(\theta)x+\cos(\theta)y)$.

Q2.

$$R_\theta R_{-\theta}=\begin{pmatrix}\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) & 0\\ 0 & \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)\end{pmatrix}=\boxed{I_2}$$

On en déduit que R_θ est inversible et $\boxed{R_\theta^{-1}=R_{-\theta}}$.

A partir de cette question, on identifie le plan complexe $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathbb{R}^2$. Ainsi, à chaque point $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ est associé une unique affixe $z=x+iy\in\mathbb{C}$.

Q3. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a vu que $f_\theta(x,y)=(\cos(\theta)x+\sin(\theta)y,-\sin(\theta)x+\cos(\theta)y)$. L'affixe correspondante de $f_\theta(x,y)$est donc $z=(\cos(\theta)x+\sin(\theta)y)+i(-\sin(\theta)x+\cos(\theta)y)$. En rappelant que $e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$, on vérifie que $e^{i\theta}(x+iy)=z$, qui est donc bien l'affixe cherhé. .

Pour la suite de cette partie, on admet que f_θ est l'endomorphisme de rotation d'angle θ et ayant pour centre l'origine, et qu'elle est représentée par l'application complexe $r_\theta:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par :

$$r_\theta(z)=e^{i\theta z}\text{ où } z\in\mathbb{C}.$$

I.B- Racines n-ièmes de l'unité. Dans cette sous partie, n désigne un entier naturel non nul. On rappelle qu'une racine n-ième de l'unité est un nombre complexe z vérifiant $z^n=1$. On note pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$, $\omega_k=\exp(\frac{2k\pi}{n}i)$.

Q4. Si $n=4$, on a $\boxed{\omega_0=1,\omega_1=i,\omega_2=-1\text{ et }\omega_3=-i}$.

Q5. Tout d'abord, une conséquence du théorème de d'Alembert-Gauss permet d'affirmer que l'équation complexe $z^n-1=0$ admet n racines (en tenant compte des mutiplicités).

Ensuite, soit $k\in[\![0,n-1]\!]$; $\left(\omega_k\right)^n=\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)^n\underset{\text{Moivre}}{=}e^{i2k\pi}=1$; donc ω_k est racine de l'équation $z^n-1=0$, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. $\boxed{\text{Les racines } n-\text{ième de l'unité sont bien }\left\{\omega_k,\ \text{pour } k\in[\![0,n-1]\!]\right\}}$

Q6. $r_{2\pi/n}(\omega_k)=e^{i\frac{2\pi}{n}}\omega_k=e^{i\frac{2\pi}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}=e^{i\frac{(2k+2)\pi}{n}}$ on a bien : $\boxed{r_{2\pi/n}(\omega_k)=\omega_{k+1}}$. Enfin, $r_{2\pi/n}(\omega_{n-1})=1$?

I.C- Marche aléatoire sur un carré.

Q7. L'affixe A_{n+1} est obtenue à partir de l'affixe A_n, soit par une rotation dans le sens trigonométrique d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, dans ce cas $A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}}A_n$; soit par une rotation dans le sens horaire d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et dans ce cas

$A_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}}A_n$; or la variable aléatoire D_n vaut 1 si la rotation s'effectue dans le sens trigonométrique et vaut -1 si elle s'effectue dans le sens inverse, donc $\boxed{A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n}$

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Les événement $\big\{(A_n = 1), (A_n = i), (A_n = -1), (A_n = -i)\big\}$ forment un système complet d'événement, donc, d'après la formule des probabilités totales :

$P(A_{n+1} = 1) = P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = 1)\big) + P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = i)\big) + P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -1)\big) + P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -i)\big)$

L'événement $\big(A_{n+1} = 1\big)$ n'est réalisable que si $\big(A_n = i\big)$ ou $\big(A_n = -i\big)$, donc $P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = 1)\big) = 0$ et $P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -1)\big) = 0$; il reste :

$$\begin{aligned} P(A_{n+1} = 1) &= P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = i)\big) + P\big((A_{n+1} = 1) \cap (A_n = -i)\big) \\ &= P(A_n = i)P_{(A_n=i)}(A_{n+1} = 1) + P(A_n = -i)P_{(A_n=-i)}(A_{n+1} = 1) \end{aligned}$$

or l'aiguille se déplace dans le sens trigonométrique ou le sens inverse avec une probabilité de $\dfrac{1}{2}$ donc :

$P_{(A_n=i)}(A_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$ et $P_{(A_n=-i)}(A_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}$; on a bien : $\boxed{P(A_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{2}P(A_n = i) + \dfrac{1}{2}P(A_n = -i)}$

Q9. De même, on a : $\boxed{\begin{array}{l} P(A_{n+1} = i) = \frac{1}{2}P(A_n = 1) + \frac{1}{2}P(A_n = -1) \\ P(A_{n+1} = -1) = \frac{1}{2}P(A_n = i) + \frac{1}{2}P(A_n = -i) \\ P(A_{n+1} = -i) = \frac{1}{2}P(A_n = 1) + \frac{1}{2}P(A_n = -1) \end{array}}$

On note la matrice M et le vecteur u suivants :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Q10. En effectuant les opérations élémentaires $L_3 \leftarrow L_3 - L_1, L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ et $L_1 \leftrightarrow L_2$, on obtient une matrice échelonnée de rang 2 donc $\boxed{\mathrm{rg}(M) = 2}$. On en déduit que $\boxed{M \text{ n'est pas inversible}}$.

Q11. On pose $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T$ et on résout le système linéaire $MX = -X$. Après calculs, on trouve que les solutions sont les éléments de $\mathrm{Vect}((1, -1, 1, -1))$ et donc une base de $\ker(M + I_4)$ est donnée par $\boxed{B = ((1, -1, 1, -1))}$. Par suite, $\boxed{\dim \ker(M + \mathrm{I}_4) = 1}$.

Q12. $\boxed{Mu = u}$. La matrice $\ker(M - I_4) \neq \{0\}$ donc $\boxed{M - I_4 \text{ n'est pas inversible.}}$ On considère la matrice colonne

$$U_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(A_n = 1) \\ \mathbb{P}(A_n = i) \\ \mathbb{P}(A_n = -1) \\ \mathbb{P}(A_n = -i) \end{pmatrix}.$$

On suppose qu'à l'étape 0, l'aiguille indique l'Est et donc que $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si $U_n = \begin{pmatrix} P(A_n = 1) \\ P(A_n = i) \\ P(A_n = -1) \\ P(A_n = -i) \end{pmatrix}$;

alors $U_{n+1} = \begin{pmatrix} P(A_{n+1} = 1) \\ P(A_{n+1} = i) \\ P(A_{n+1} = -1) \\ P(A_{n+1} = -i) \end{pmatrix}$ et par les calculs précédents, $U_{n+1} = MU_n$. On en déduit que $U_n =$

M^nU_0. Il faut alors calculer M^n. Bonus : Pour cela, on peut diagonaliser M et écrire $M = PDP^{-1}$ (avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans notre cas, alors $M^n = PD^nP^{-1}$.

Partie II- A propos des lois de Rademacher

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Rademacher.

Q13. $\mathbb{E}(X) = -1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \boxed{0}$.

Q14. Par la formule de Konig-Huygens, $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X^2)$ ici. Par la formule de transfert, $\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{2} + 1^2 \times \frac{1}{2} = 1$. Donc $\boxed{V(X) = \mathbb{E}(X^2) = 1}$.

Dans la suite, on considère $X_1, \dots, X_n$ une suite de n variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Rademacher.

Q15. Soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$ différents ($i \neq j$). X_i et X_j sont indépendantes donc $\mathbb{E}(X_iX_j) = \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j) = 0 \times 0 = \boxed{0}$.

Pour $i = 1, \dots, n$, on note $Y_i = \frac{X_i+1}{2}$.

Q16. Y_i vaut 1 quand $X_i = 1$ et $Y_i = 0$ quand $X_i = 0$. Donc $\boxed{X_i \text{ suit la loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$

Q17. On note $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Par opérations sur des variables indépendantes, $Y_1, \dots, Y_n$ sont mutuellement indépendantes. Par le cours, $\boxed{Y \text{ suit donc la loi binomiale } \mathcal{B}(n,p)}$.