An3 - Séries numériques

Nature de séries

1 - Étudier la nature des séries de termes généraux suivants :

a) $ne^{-\sqrt{n}}$
b) $\frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$
c) $\frac{\sqrt{n}(1+\sin(n))}{n^3}$
d) $\frac{n^2}{(n-1)!}$
e) $\ln\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}\right)$
f) $e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2 - Étudier, en fonction des paramètres $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général

$$\frac{1}{n^\alpha\ln(n)^\beta}.$$

3 - On note, pour $n\geq 1$, $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

1. Peut-on appliquer le critère spécial des série alternées à $\sum u_n$?
2. Donner un équivalent simple de (u_n). Peut-on conclure quant à la convergence de la série $\sum u_n$?
3. Montrer que $u_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+r_n$ où $r_n=O(\frac{1}{n\sqrt{n}})$.
4. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

4 -Étudier, selon la valeur du paramètre $a\in\mathbb{R}$, la nature des séries de terme général suivant :

a) $e^{\frac{1}{n}}-1-\frac{a}{n}$
b) $\frac{n!}{n^{an}}$
c) $\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{a}{n}$

5 ★ - Étudier, selon la valeur du paramètre $a>0$, la nature de la série de terme général

$$u_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{(k+n)^a}.$$

6 ★ - Étudier, selon la valeur du paramètre $a>0$, la nature de la série de terme général $\arctan(n+a)-\arctan(n)$.

Calculs de valeurs

7 -Montrer que la série de terme général

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

pour $n\geq 2$, est convergente et calculer sa somme.

8 - Étudier, selon la valeur des paramètres $a,b\in\mathbb{R}$, la nature des séries de termes généraux suivants. En cas de convergence, calculer la valeur de la somme.

a) $\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$
b) $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$

9 - *Un somme qui vaut $\pi/4$.*

1. Déterminer la nature de la série (divergente, semi-convergente, absolument convergente) de terme général $\frac{(-1)^n}{2n+1}$.
2. Pour $n\geq 1$, on note $S_n=\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{2k+1}$.
   a) En utilisant que $\frac{1}{2k+1}=\int_0^1 x^{2k}dx$, montrer que
   $$S_n-\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx$$
   b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{(-x^2)^{n+1}}{1+x^2}dx=0$.
   c) En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

10 -*Fait en cours.*

1. Déterminer la nature de la série (divergente, semi-convergente, absolument convergente) de terme général $\frac{(-1)^n}{n+1}$.

2. En s'inspirant de l'exercice précédent, montrer calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

---

11 -Calculer la somme de la série suivante après avoir vérifié sa convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3^n}$$

---

12 -*Un peu de trigo.*

1. Soit $a \in]0, \pi/2[$. Simplifier l'expression $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$.

2. En déduire la nature de la série suivante et sa somme :$\sum \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^n}\right)\right)$.

Comparaison série/intégrale

---

13 - Séries de Riemann.

1. Soit $\alpha < 1$. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, retrouver que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et déterminer un équivalent simple de la somme partielle $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

2. Soit $\alpha > 1$. A l'aide d'une comparaison série/intégrale, retrouver que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge et déterminer un équivalent simple du reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to +\infty$.

---

14 - **Série harmonique.** Pour $n \geq 1$, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.

2. On note $v_n = H_n - \ln(n)$. L'objectif de cette question est de montrer que (v_n) converge. *Sa limite, notée γ, est appelée la constante d'Euler.*

   a) Montrer que $v_{n+1} - v_n \sim -\frac{1}{2n^2}$.

   b) En déduire la nature de la série $\sum v_{n+1} - v_n$.

   c) Conclure.

---

15 -Déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln(k)}$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercices plus théoriques

---

16 -

1. Question préliminaire : montrer que pour tous $a, b > 0$, $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que la série de terme général u_n converge. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

---

17 - Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive telle que $(u_n)^{1/n}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer que si $\ell \in [0, 1[$, alors la série $\sum u_n$ converge.

2. Montrer que si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement. Cette règle s'appelle la règle de Cauchy (hors programme) et ressemble beaucoup à la règle de d'Alembert.
