Programme de khôlle. Semaine 8

Description des thèmes

An3 - Séries numériques

1) Généralités.

   1. Définitions - Compléments sur les limites d'une suite à valeurs complexes : (z_n) converge si et seulement si $\mathrm{Re}(z_n)$ et $\mathrm{Im}(z_n)$ convergent. Définitions : série, terme général d'une série, somme partielle d'une série. Définition d'une série convergente/divergente. Définition d'une reste d'une série convergente. Le reste tend vers 0. Les notations $\sum u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sont de nature différente. Un premier exemple de série convergente : $\sum \frac{1}{2^n}$. Un premier exemple de série divergente : la série harmonique à l'aide de l'inégalité $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$.
   2. Premières propriétés - Si une série converge, son terme général tend vers 0. La réciproque est fausse. Divergence grossière d'une série. Linéarité de la somme en cas de convergence. Application au cas des séries à termes complexes : $\sum z_n$ converge ssi $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum i_m(z_n)$ convergent.
   3. Étude des séries géométriques - Critère de convergence de $\sum z^n$ avec $q \in \mathbb{C}$. Valeur de la somme en cas de convergence.
   4. La transformation suite/série - Relation$u_n = S_n - S_{n-1}$. Rappel sur les sommes télescopiques. (u_n) converge ssi $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Exemple : la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge.

2) Séries à termes positifs (SATP)

   1. Sommes partielles d'une SATP - La suite des sommes partielles d'une SATP est croissante. Une SATP converge ssi la suite de ses sommes partielles est bornée.
   2. Théorème de comparaison des séries à termes positifs. Cas $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge et alors, $\sum_{k=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n$. Contraposée. Cas $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Cas $u_n = o(v_n)$ et $u_n = O(v_n)$. Contraposée. Si (u_n) et (v_n) sont positives et $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature. Le critère s'applique aussi si v_n est positive à partir d'un certain rang (puisque cela implique que u_n est positive à partir d'un certain rang).
   3. Règle de D'Alembert - Comparaison à une série géométrique : si $u_n \geq 0$ et $u_n = O(q^n)$ avec $q < 1$, alors $\sum u_n$ converge. Critère de d'Alembert. Démonstration exigible : si $u_n > 0$ et si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell$ converge, alors si $\ell < 1$, $\sum u_n$ converge et si $\ell > 1$, $\sum u_N$ diverge. Exemple : nature de $\sum nq^n$ selon la valeur de $q > 0$. Le cas $\ell = 1$ est un cas douteux. On ne peut pas conclure. Cas $u_n = \frac{1}{n}$ et $u_n = \frac{1}{n^2}$
   4. Comparaison série/intégrale - Théorème de comparaison sérié/intégrale pour une fonction $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive , continue et **décroissante**. La méthode de comparaison/série intégrale est très utile pour déterminer un équivalent de la somme partielle (en cas de divergence) ou du reste en cas de convergence. Exemple : nature et équivalent de $\sum \frac{1}{n}$. Exemple : nature et équivalent du reste pour $\sum \frac{1}{n^2}$. Exemple : nature de $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$.

5. Séries de Riemann - Critère de convergence des séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$. Démo - Méthode 1 : à l'aide d'une comparaison série/intégrale. Démo - Méthode 2 pour $\alpha \neq 1$, à l'aide de l'équivalent de $\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ et pour $\alpha = 1$, à l'aide de $\ln(n+1) - \ln(n)$. **Application** : Méthode du $n^\alpha u_n$.

3) Convergence absolue et séries alternées.

1. Séries absolument convergentes - Définition d'une série absolument convergente. La convergence absolue implique la convergence. Exemple : étude de la série de terme général $u_n = \frac{\cos(n)}{n^2+1}$. Définition d'une série semi-convergente : attention, il y en a.
2. Théorème des séries alternées - Rappels de la définition des suites adjacentes et du théorème des suites adjacentes. Théorème des séries alternées et encadrement de la somme. Exemple d'une série semi-convergente : $\frac{(-1)^n}{n}$. Calcul de la valeur en partant de $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}dt$ pour $k \geq 1$. Étude de $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$. La série $\sum u_n$ diverge, bien que $u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série convergente. *Enseignement : le critère de comparaison n'est valable que pour les séries à termes positifs.*
3. Point méthode et étude de $\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants :

- **Panier 1** :
    1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $\sum_n z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$ et calculer la valeur en cas de convergence.
    2. Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et calculer sa valeur.
- **Panier 2** : Énoncer et prouver le critère de convergence des séries de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$.
- **Panier 3** :
    1. Énoncer **correctement** le critère de D'Alembert.
    2. Déterminer l'ensemble des rées strictement positifs q tels que $\sum nq^n$ converge.
- **Panier 4** : Énoncer **correctement** et prouver le critère spécial des séries alternées.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.