Programme de khôlle. Semaine 9

Description des thèmes

La semaine de khôlle est consacrée aux **révisions des trois premiers chapitres d'analyse.**

An1 - Intégration sur un segment

Voir Programme de la semaine 2

An2 - Intégrales généralisées

Voir Programme de la semaine 6

An3 - Séries numériques

Voir Programme de la semaine 8

Questions de cours

Les questions dites "de cours" sont certaines questions du Problème 2 du DS2 (Enoncé / Corrigé). Il a explicitement été demandé aux étudiants de retravailler ce problème.
Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants, portant sur l'étude de la fonction f suivante, définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$$

- **Panier 1** :
  1. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t$ est-elle convergente ? Calculer alors sa valeur en fonction de α.
  2. Un nombre réel x étant fixé, donner un équivalent (sous la forme d'une puissance de t), lorsque t tend vers 0^+, de la fonction définie sur $]0,1]$ par $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}}{1+t}$.
  3. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x>0$.
- **Panier 2** :
  1. Montrer que $f(1)=\ln(2)$.
  2. Montrer que $f(2)=1-\ln(2)$. On pourra remarquer que, pour tout $t\in[0,1]$:

$$1-\frac{1}{1+t}=\frac{t}{1+t}.$$

  3. Rappeler la formule de factorisation de a^n-b^n, pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $n\in\mathbb{N}^*$.

4. En déduire que, pour tout $t \in [0,1]$, $n \geq 1$:

$$1 - (-t)^n = (1+t)\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k$$

- **Panier 3** :

1. Rappeler la définition de la décroissance d'une fonction g définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2. Soit α et β deux nombres réels tels que $-1 < \alpha \leq \beta$. Comparer, pour tout $t \in]0,1]$, t^α et t^β.
3. En déduire que f est décroissante sur $]0,+\infty[$.

- **Panier 4** :

1. Montrer que, pour tout $x > 0$ et $t \in]0,1]$:

$$\frac{t^{x-1}}{2} \leq \frac{t^{x-1}}{1+t} \leq t^{x-1}.$$

2. En déduire que, pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{2x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$$

3. En déduire la limite de f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en 0.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur les chapitres de la semaine.