DM 6 : Sur le bord du cercle de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$

Les parties I et II sont obligatoires.

La partie III est facultative.

Partie I- La série harmonique diverge

Dans cette partie, on redémontre que la série harmonique diverge

Q1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$ et en déduire la nature de la série de terme général $\ln(n+1) - \ln(n)$.

Q2. Déterminer un équivalent simple de $\ln(n+1) - \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

Q3. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Dans la suite, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.

Q4. Montrer que $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})$.

Q5. En déduire que $v_n - v_{n-1} \sim -\frac{1}{2n^2}$.

Q6. Montrer que (v_n) converge.*Penser à jeter un œil à la section Transformation suite/série*

La limite de (v_n) est souvent notée γ et appelée la constance γ d'Euler.

Q7. En déduire un équivalent simple de H_n.

Partie II- La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$

Q8. Le cas $z = -1$. Justifier soigneusement que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et vérifier qu'elle n'est pas absolument convergente.

Q9. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge absolument. *On pourra utiliser le critère de D'Alembert.*

Q10. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ diverge. *et même grossièrement...*

Partie III- Comportement au bord du disque de convergence

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. On note $z = e^{i\theta}$. On s'intéresse au comportement de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Q11. Justifier que la série n'est pas absolument convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

Q12. Calculer σ_n et justifier que (σ_n) est bornée.

Q13. En déduire que la série de terme général $\frac{\sigma_n}{n(n+1)}$ est absolument convergente.

Q14. En exploitant le fait que $z^k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{k(k+1)} \right) + \frac{\sigma_n}{n} - \sigma_0$$

On dit qu'on fait une transformation d'Abel.

Q15. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ est convergente.

Q16. Conclusion : Quel est l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge ?