DM 5 : Déterminants de Vandermonde

La partie I est obligatoire.

La partie II est facultative.

Partie I- Des calculs de déterminants de Vandermonde en dimension 2, 3 et 4

Q1. On :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (2 \times 9 - 3 \times 4) - (1 \times 9 - 4 \times 1) + (1 \times 3 - 2 \times 1) = 6 - 5 + 1 = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = ... = 12$$

Q2. On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Soit $x \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \det(xI_2 - A) &= \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ -1 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x-2) - 1 = x^2 - x - 2x + 2 - 1 = \boxed{x^2 - 3x + 1} \end{aligned}$$

b) Le discriminant de $x^2 - 3x + 1$ est $\Delta = 9 - 4 = 5$ donc ses racines sont $\boxed{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}$, qui sont alors les valeurs de x annulant $\det(xI_2 - A)$ et donc les valeurs pour lesquelles $xI_2 - A$ n'est pas inversible.

Q3. Soit $a, b \in \mathbb{C}$.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = \boxed{b - a}$.

b) Donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $b - a \neq 0$ si et seulement si $\boxed{b \neq a}$.

Q4. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$. On considère la matrice $M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

a) On développe par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} &= a^2(c-b) - b^2(c-a) + c^2(b-a) \\ &= a^2c - a^2b - b^2c + b^2a + c^2b - c^2a \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (b-a)(c-b)(c-a) &= (b-a)(c^2 - ca - cb + ab) \\ &= bc^2 - acb - cb^2 + ab^2 - ac^2 + ca^2 + acb - a^2b \\ &= a^2c - a^2b - b^2c + b^2a + c^2b - c^2a \end{aligned}$$

D'où $\boxed{\text{l'égalité demandée.}}$

b) Donc $M(a,b,c)$ est inversible si et seulement si $(b-a)(c-b)(c-a) \neq 0$ donc ssi $b - a \neq 0$ et $c - b \neq 0$ et $c - a \neq$ donc ssi $\boxed{a, b, c \text{ sont deux à deux distincts}}$.

Q5. Une application : on considère le nombre complexe $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$$

a) $j = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = \boxed{\dfrac{-1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.

b) $j^3 = e^{2i\pi/3 \times 3} = e^{2i\pi} = \boxed{1}$. On a ensuite $j^4 = j^3 \times j = \boxed{j}$.

c) On remarque de $\boxed{M = M(1, j, j^2)}$ puisque $j = j^4$. Or, $1, j$ et j^2 sont 2 à 2 distincts donc $\boxed{M \text{ est inversible}}$ par Q4.

d) On sait que $j^3 - 1 = 0$. Or, $j^3 - 1 = (j-1)(j^2 + j + 1)$. comme $j - 1 \neq 0$, on peut simplifier et l'on a $\boxed{1 + j + j^2 = 0}$.

e) En utilisant la question 4a), on a

$$\begin{aligned}\det(M) &= (j-1)(j^2 - j)(j^2 - 1)\\ &= (j-1)(j-1)j(j-1)(j+1)\\ &= (j-1)^3(j^2 + j) = (j-1)^3(-1) = \boxed{(1-j)^3}\end{aligned}$$

Partie II- Cas général

Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On note $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ la matrice, dite de Vandermonde, suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \ldots & \alpha_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

On note enfin $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det(M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$. On souhaite montrer par récurrence sur n que

$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i-1} (\alpha_i - \alpha_j) \tag{1}$$

Q6. Le déterminant de Vandermonde $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est exactement le produit de tous les termes de la forme $\alpha_j - \alpha_i$ pour $i < j$. Pour que ce terme soit non nul, il faut et il suffit que tous ces facteurs soient non nuls et donc $M(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est inversible ssi $\boxed{\text{les } \alpha_i \text{ sont 2 à 2 distincts}}$.

Q7. Soit X un indéterminée. On note $P(X) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X)$.

a) En développant le calcul de $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X)$ par rapport à la dernière colonne, on peut voir que $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n+i-1} X^i D_i$ où D_i est un déterminant calculé sans l'indéterminée X. Ainsi, $\boxed{P \text{ est un polynôme de degré au plus } n-1 \text{ et le coefficient dominant devant } X^{n-1} \text{ est en fait } V}$

b) Si l'on remplace X par α_i pour $1 \leq i \leq (n-1)$, on peut observer que la matrice possède deux fois la même colonne donc $P(\alpha_i) = 0$. Ayant supposé les α_i deux à deux distincts, on a trouvé $n - 1$ racines sur une polynôme de degré $n - 1$ donc, sans oublier de rajouter le coefficient dominant, on a

$$\boxed{P(X) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_{n-1})}$$

c) On prouve l'hérédité (le reste de la rédaction est laissée au lecteur) : si la formule est vraie pour $n - 1$, pour passer au rang n, on distingue deux cas :

- Deux α_i sont égaux : dans ce cas, les deux valeurs sont nulle donc il y a égalité.
- Les α_i sont 2 à 2 distincts : on a $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, X) = P(X) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_{n-1})$ donc avec $X = \alpha_n$, $V(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$. En appliquant l'hypothèse au rang $n - 1$, on a
$$V(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i} (\alpha_i - \alpha_j)$$
Le terme $(\alpha_n - \alpha_1) \ldots (\alpha_n - \alpha_{n-1})$ est alors le terme en $i = n$ dans le produit précédent qui permet d'obtenir la formule au rang n.

Q8. Application : Soin $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$, qui est une racine n-ième de l'unité. On introduit la matrice suivante

$$\Omega_n = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \ldots & \omega^{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

C'est la matrice de la transformée de Fourier discrète.

a) On remarque que $\Omega_n = M(1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1})$. Les racines n-ième de l'unité étant deux à deux distinctes, $\boxed{\Omega_n \text{ est inversible}}$.

b) On calcule le coefficient i, j de la matrice

$$\begin{aligned}(\Omega_n\overline{\Omega_n}^T)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(\Omega_n)_{ik}(\overline{\Omega_n}^T)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega^{(i-1)(k-1)}\overline{\omega}^{(k-1)(j-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega^{(i-1)(k-1)}\omega^{-(k-1)(j-1)} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\omega^{(i-j)(k-1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{(i-j)}\right)^{k-1} \\ &= \begin{cases} n \text{ si } i=j \\ \frac{1-\omega^{n(i-j)}}{1-\omega^{i-j}} = 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, on applique la formule d'une somme géométrique et l'on vérifie que $\omega^{i-j} = 1 \iff \frac{2i\pi}{n}(i-j) = 0[2i\pi] \iff n$ divise $i-j \iff i=j$ (puisque $n-1 \leq i-j \leq n-1$) On $\boxed{\Omega_n\overline{\Omega_n}^T = nI_n}$.

c) On a $\Omega_n \times \frac{1}{n}\overline{\Omega_n}^T = I_n$ donc $\boxed{\Omega_n^{-1} = \dfrac{1}{n}\overline{\Omega_n}^T}$.