Programme de khôlle. Semaine 10

Description des thèmes

Les sections grisées seront au programme de la semaine prochaine mais les élèves sont fortement invités à s'y mettre rapidement. Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.

AL 4 - Réduction d'endomorphismes et de matrices

1) Éléments propres d'un endomorphisme

   1. Définitions : Valeurs propres, vecteurs propres, spectre, sous-espace propres. Cas des matrices.
   2. Propriétés du spectre et des vecteurs propres. Interprétation en terme de droite stable. Un sous-espace propre de f est stable par f. Une famille de vecteurs propres associée à des VP distinctes est libre. Max n valeurs propres en dimension n. Une somme de sous-espaces propres est directe.

2) Polynôme caractéristique.

   1. Définition pour une matrice, un endomorphisme. Notation χ_f, χ_A. Cas d'une matrice triangulaire.
   2. Rappels sur les polynômes : polynôme scindé , multiplicité d'une racine, Polynôme scindé à racines simples. Théorème de D'Alembert Gauss.
   3. Lien entre polynôme caractéristique et spectre. Les racines de χ_f sont les valeurs propres. Définition de la multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre la multiplicité et la dimension du sous-espace propre. Exemple où il n'y a pas égalité : cas de la matrice de Jordan de taille 2, puis de taille n.
      Attention : Les valeurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dépendent du corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Exemple de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   4. Étude des projecteurs et des symétries : Calcul du polynôme caractéristique. Calcul des valeurs propres et de leur multiplicité. Comparaison avec la dimension du sous-espace propre.

3) Endomorphismes et matrices diagonalisables.

   1. Définition d'une endomorphisme diagonalisable : Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Caractérisation par l'existence d'une base de vecteurs propres. Cas des projecteurs et des symétries.
   2. Matrices diagonalisables. Une matrice est diagonalisable si l'endomorphisme canoniquement associé est diagonalisable. Caractérisation : **Une matrice est diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale. Relation** $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de diagonalisation.
   3. Caractérisations de la diagonalisabilité.

- Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-espaces propres est égale à E. Il suffit de regarder la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- **Critère pratique** : Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si **son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.**
- Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable donc **si χ_f (resp. χ_A) est scindé à racines simples, alors f (resp. A) est diagonalisable.**

4. Méthode : Diagonaliser, si possible, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (i) Calculer $\chi_A(x) = \det(xI_n - A)$.
   (ii) Déterminer les racines de χ_A puis le factoriser : Il faut donc également calculer la multiplicité des racines. Supposons que l'on arrive alors à écrire
   $$\chi_A(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)^{m_i}$$
   p est le nombre de valeurs propres, λ_i sont les valeurs propres et m_i la multiplicité de λ_i.
   (iii) Cas favorable : χ_A possède n racines ($n = p$ et $m_i = 1$ pour tout i). χ_A est donc scindé à racines simples. A est donc diagonalisable et l'on connaît les n valeurs propres.
   (iv) Dans tous les cas, il faudra ensuite calculer une base des sous-espaces propres. On doit donc résoudre le système : $AX - \lambda_i X = 0$. Notons B_i une base de $\ker(A - \lambda I_n)$. On a donc $|B_i| = \dim\ker(A - \lambda_i I_n)$.
   (v) Si pour tout i, $\dim\ker(A - \lambda_i I_n) = m_i$, alors A est diagonalisable. Sinon, elle ne l'est pas.
   (vi) Si elle l'est, il reste alors à diagonaliser effectivement A : écrire $A = PDP^{-1}$.

4) Application de la diagonalisation

1. Calcul de puissance.
2. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2. Au programme de la semaine prochaine. Théorème de structure. Etude de la suite de Fibonacci.

5) Matrices et endomorphismes trigonalisables.

1. Définition et caractérisation : Un endomorphisme est dit trigonalisable (TZ) s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. **Caractérisation** : TZ (sur $\mathbb{K}$) ssi **χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.** Corollaire : **toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est TZ.**
2. Quelques exemples (*Aucune technique de trigonalisation effective n'est au programme.*)
3. Lien entre valeurs propres, trace et déterminant d'une matrice ou endomorphisme trigonalisable. **Somme et produit** des valeurs propres.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** : Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev E et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de E.
  1. Rappeler la définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre.
  2. Rappeler la définition du sous-espace propre E_λ associée à λ.
  3. Montrer que E_λ est stable par f.
- **Panier 2** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  1. Rappeler la définition du polynôme caractéristique de A.
  2. Montrer que l'ensemble de ses racines est l'ensemble des valeurs propres de A.
- **Panier 3** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
  1. Montrer que A est diagonalisable (au sens de la définition donnée dans le cours) si et seulement si elle sembable à une matrice diagonale.
  2. On suppose que A est diagonalisable. On note $(X_1, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres associées. Montrer $A = PDP^{-1}$ où P et D sont deux matrices à préciser.
- **Panier 4** : Soit E un K-ev de dimension finie n et soient F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de dimensions respectives $f > 0$ et $g > 0$. On note p le projecteur sur F parallèlement à G.
  1. Ecrire la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.
  2. Justifier que p est diagonalisable.
  3. Donner $\chi_p(X)$.
  4. Préciser $\mathrm{Sp}(p)$ et la multiplicité de chaque valeur propre.
  5. Préciser qui est chaque sous-espace propre ainsi que sa dimension.

Calculs pratiques sur des (petites) matrices

Après la question de cours, le kholleur donnera deux matrices carrées A (quelconque) et B (diagonalisable sur $\mathbb{R}$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son choix, de taille 2, 3 ou 4 et posera les questions suivantes :

- La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Sur $\mathbb{C}$?
- Justifier que la matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ puis déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $B = PDP^{-1}$.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.