DM 7 : Réduction de matrices

Les parties I, II et III sont obligatoires.

La partie IV est facultative

Partie I- Avec les petites roues

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Q1. Calculer $\chi_A(X)$ puis montrer que $\chi_A(X) = (X-1)(X-2)^2$.

Q2. Quelles sont les valeurs propres de A ?

Q3. Montrer que $\dim \ker(A - I_3) = 1$ et en donner un vecteur directeur $u \in \mathbb{R}^3$.

Q4. Montrer que $\dim \ker(A - 2I_3) = 2$ et en donner une base (v_1, v_2).

Q5. La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

Q6. Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Partie II- Sans les petites routes

On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Q7. Calculer $\chi_B(X)$ puis montrer que $\chi_B(X) = (X-1)^2(X+1)$.

Q8. Quelles sont les valeurs propres de B ?

Q9. Calculer la dimension des **deux** sous-espaces propres de B.

Q10. La matrice B est-elle diagonalisable ? Justifier.

Q11. La matrice B est-elle trigonalisable ? Justifier.

On note

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est B.

Q12. Vérifier que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q13. Calculer $Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Q14. En déduire l'expression d'une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et d'une matrice triangulaire supérieure T telles que $B = PTP^{-1}$.

Partie III- Sans les mains

On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Q15. Montrer que C est diagonalisable et préciser son spectre.

Q16. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $C = PDP^{-1}$.

Partie IV- Sur un monocycle - Matrices circulantes

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on note

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Q17. Montrer que $\chi_J(X) = X^n - 1$.

Q18. En déduire que J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et préciser son spectre.

Q19. Montrer que $J^n = I_n$ en utilisant le résultat précédent.

Q20. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Montrer que

$$X \in \ker(J - \lambda I_n) \iff \begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, n-1\}, x_i = \frac{1}{\lambda^{i-1}} x_1 \\ x_n = \lambda x_1 \end{cases}$$

Q21. En déduire l'expression d'un vecteur propre de J pour chacune de ses valeurs propres.

Q22. Soit $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On note

$$A = a_0 I_n + a_1 J + a_2 J^2 + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$$

a) Écrire A sous forme matricielle
b) Justifier que A est diagonalisable et préciser son spectre.