DM 6 : Sur le bord du cercle de convergence de $\sum \frac{z^n}{n}$

Les parties I et II sont obligatoires.

La partie III est facultative.

Partie I- La série harmonique diverge

Dans cette partie, on redémontre que la série harmonique diverge

Q1. $\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(n+1) - \ln(1) = \boxed{\ln(n+1)}$ par télescopage. On en déduit que la série de terme général $\ln(n+1) - \ln(n)$ $\boxed{\text{diverge}}$ puisque $\ln(n+1) \to +\infty$.

Q2. $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$.

Q3. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_n \frac{1}{n}$ et $\sum_n \ln(n+1) - \ln(n)$ ont même nature, donc $\sum_n \frac{1}{n}$ $\boxed{\text{diverge}}$.

Dans la suite, on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $v_n = H_n - \ln(n)$.

Q4. $v_n - v_{n-1} = H_n - H_{n-1} - \ln(n) + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln((n-1)/n)) = \boxed{\frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n})}$.

Q5. On rappelle que $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ quand $x \to 0$. On a donc $v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(1/n^2) \sim \boxed{-\frac{1}{2n^2}}$.

Q6. Par le cours, on sait que (v_n) converge ssi $\sum v_{n+1} - v_n$ converge. Par comparaisons de séries à termes positifs (négatifs plus exactement ici), et comme $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge (somme de Riemann avec $\alpha = 2$), on peut dire que $\sum v_{n+1} - v_n$ converge. Donc $\boxed{(v_n) \text{ converge}}$. *Penser à jeter un œil à la section Transformation suite/série*

La limite de (v_n) est souvent notée γ et appelée la constance γ d'Euler.

Q7. On a que $H_n = v_n + \ln(n)$. Or, $v_n = o(\ln(n))$ donc $\boxed{H_n \sim \ln(n)}$.

Partie II- La série entière $\sum \frac{z^n}{n}$

Q8. La série $\sum(-1)^n \frac{1}{n}$ est alternée. La suite $(\frac{1}{n})$ est $\boxed{\text{décroissante et tend vers 0}}$ donc par le $\boxed{\text{critère spécial des séries alternée}}$, $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}}$. En valeir absolue, le terme général devient $\frac{1}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$) donc $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{n} \text{ n'est pas absolument convergente}}$.

Q9. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On note $u_n = \frac{|z|^n}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = |z| \times \frac{n}{n+1} \to |z|$. Comme $\boxed{|z| < 1, \text{ le critère de D'Alembert}}$ affirme que $\sum u_n$ converge et donc $\boxed{\sum \frac{z^n}{n} \text{ converge absolument}}$.

Q10. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$. Par croissance comparée, $\frac{|z|^n}{n} \to \infty$ donc $\boxed{\text{la série diverge grossièrement}}$.

Partie III- Comportement au bord du disque de convergence

Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. On note $z = e^{i\theta}$. On s'intéresse au comportement de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Q11. Justifier que la série n'est pas absolument convergente. *Evident.*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} z^k$$

Q12. Somme géométrique : $\sigma_n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$. $|z| = 1$ donc $|z^n| = 1$ et donc $|\sigma_n| \leq \frac{2}{|z-1|}$ ce qui prouve que (σ_n) est bornée.

Q13. $|\frac{\sigma_n}{n(n+1)}| = O(\frac{1}{n^2})$ donc par comparaison de série à termes positifs, $\sum |\frac{\sigma_n}{n(n+1)}|$ converge.

Q14.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{n} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k - \sigma_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_{k-1}}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sigma_k}{k+1} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)\right) + \frac{\sigma_n}{n} - \sigma_0 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_k}{k(k+1)}\right) + \frac{\sigma_n}{n} - \sigma_0
\end{aligned}$$

On dit qu'on fait une transformation d'Abel.

Q15. Dans l'expression ci dessus, la somme converge (puisque c'est la somme partielle d'une série absolument convergente et donc convergente) et $\frac{\sigma_n}{n} \to 0$. Donc $\sum_n \frac{z^n}{n}$ converge.

Q16. Conclusion : Quel est l'ensemble des complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge ? Il s'agit de $\boxed{\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\} \setminus \{1\}}$.