An4- Séries entières

Calcul de rayon de convergence

1 **-** Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$
b) $\sum n! z^n$
c) $\sum \ln(n) z^n$
d) $\sum \frac{z^n}{n^n}$
e) $\sum \frac{e^{in}}{1+in} z^n$
f) $\sum \frac{n+2^n}{n^2+3n} z^n$

2 **-** Soient deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$.

2. Soit $R \in [0, +\infty]$. On note $\mathcal{E}_R$ l'ensemble des suites (a_n) telles que $\sum a_n z^n$ possède un rayon de convergence supérieur ou égal à R. Déduire de la question précédente que $\mathcal{E}_R$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

3 **-***La jungle*

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où a_n est la n-ème décimale de $\sqrt{2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ où $a_n = \exp(\cos(n))$.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum H_n z^n$ où $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4 ★ **-** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in [0, +\infty]$. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série entière $\sum n^\alpha a_n z^n$ a pour rayon de convergence R.

Calculs de sommes de séries entières

5 **-** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Rayon de convergence et somme de $\sum \mathrm{Tr}(A^n) z^n$.

Indication : Et si on diagonalisait A ...

6 **-** *Vers la loi de Poisson.* Soit $\lambda > 0$. On note $p_n = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$.

1. Justifier que la série de terme général p_n converge et calculer sa somme.

2. Justifier que la série de terme général np_n converge et calculer sa somme.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série de terme général $p_n t^n$ converge et calculer sa somme $G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

7 **-**Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Justifier que la série numérique suivante converge et calculer sa somme : $\sum \frac{\cos(n\theta)}{2^n n!}$.

Développement en série entière

8 **-** *Arctan.*

1. Rappeler le développement en série entière de $\frac{1}{1+x}$ en rappelant le domaine de validité.

2. En déduire que arctan est développable en série entière et préciser son développement ainsi que le domaine de validité.

9 **-** *Avec* exp

1. Justifier que $x \mapsto e^{x^2/2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser son développement.

2. Justifier que $x \mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et préciser son développement.

3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \leq e^{x^2/2}$.

10 **-***Arcsin*

1. Démontrer que arcsin est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

2. $*$ Donner son développement en série entière.

---

11 -*Argth.*

1. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$.

2. En déduire une primitive de $\frac{1}{1-x^2}$.

3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)2^n}$.

---

12 ★ - *Un contre-exemple important.* On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(k)}(x) = P_k(1/x)f(x)$ pour tout $x \neq 0$.

2. En déduire que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

3. Montrer que la série de Taylor de f en 0 est nulle. On a alors un exemple de fonction $\mathscr{C}^\infty$ qui n'est pas développable en série entière.

Applications des séries entières

---

13 -*Nombre d'involutions.* On dit qu'une bijection $f : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ est une involution si $f \circ f = \mathrm{Id}$. On note I_n le nombre d'involutions de $\{1,\dots,n\}$. On posera $I_0 = 1$. On admet que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = I_n + nI_{n-1}$.

1. Justifier que le rayon de convergence de $\sum \frac{I_n}{n!} z^n$ est plus grand que 1.

2. On note, pour $x \in]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$. Montrer que $S(x)$ vérifie $S'(x) = (1+x)S(x)$.

3. En déduire une expression de $S(x)$.

4. $*$ Démontrer la formule de récurrence admise sur (I_n).

---

14 -*Equation de Bessel.* Montrer que l'équation différentielle $t^2y''(t) + ty'(t) + t^2y(t) = 0$ possède une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ développable en série entière.

---

15 ★ - *Suite de Fibonacci.* On s'intéresse à la suite de Fibonacci définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$. On ne calculera pas explicitement l'expression de la suite avec le théorème des suites récurrentes doubles.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum u_n z^n$ vérifie $R \geq 1/2$.

2. Donner l'expression explicite de la somme f de la série entière.

3. On pose $\Phi = (1+\sqrt{5})/2$ et $\Phi' = (1-\sqrt{5})/2$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\Phi, -\Phi'\} \qquad \frac{1}{1-x-x^2} = \frac{\alpha}{x+\Phi} + \frac{\beta}{x+\Phi'}.$$

4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Pour aller plus loin

---

16 - *Une transformation d'Abel.* On va s'intéresser au comportement de la série entière $\sum \frac{z^n}{n}$ sur le bord du disque de convergence.

1. Rappeler le rayon de convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n}$ et justifier que la série diverge pour $z = 1$ et converge pour $z = -1$.

2. On considère à présent $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On suppose que $z \neq 1$ et on cherche à étudier la nature de la série $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$. On notera $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\theta}}{k}$ la somme partielle de la série. On introduit également, pour $n \geq 1$,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\theta}$$

On posera $\sigma_0 = 0$.

a) Calculer explicitement σ_n et justifier que (σ_n) est bornée.

b) En exploitant le fait que $e^{ik\theta} = \sigma_k - \sigma_{k-1}$, démontrer la formule suivante :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sigma_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{\sigma_n}{n}$$

c) En déduire que (S_n) converge.