Chapitre P1 : Ensembles probabilisés finis

1 Modéliser une situation aléatoire

L'étude des probabilités permet de rendre compte mathématiquement de situations aléatoires, dans lesquelles on ne peut pas prédire avec certitude l'issue.

1.1 Expérience aléatoire

Définition.

Une **expérience aléatoire** est une expérience dont les résultats possibles sont connus sans que l'on puisse déterminer à l'avance lequel sera réalisé.

Exemple(s). Dans les jeux de hasard : cartes, dés, pile ou face, etc.
En physique quantique, la position d'une particule ne peut pas être prédite avec certitude et on lui associe plutôt une probabilité de présence.
Le temps de vie d'une atome radioactif avant désintégration est aléatoire.
On peut modéliser le début de propagation d'une épidémie par une expérience aléatoire.

Définition.

Dans une expérience aléatoire, un résultat possible est appelé une **issue** de l'expérience.
L'ensemble des issues possibles de l'expérience aléatoire est appelé l'**univers** de l'expérience. En général, on le note Ω. Les issues sont alors généralement notées ω.

Savoir-faire.

Modéliser une situation aléatoire, c'est déterminer l'univers Ω qui décrit au mieux l'expérience aléatoire à laquelle on s'intéresse. L'idée est donc de traduire en un objet mathématique (Ω) une situations aléatoire décrite dans le langage courant. Il n'y a pas toujours qu'une seule façon de faire.

Exemple(s). Voici quelques exemples d'expériences aléatoires et d'univers qui permettent de décrire toutes les issues possibles :

- On lance une pièce à pile ou face : les issues possibles sont ....
  L'univers est donc $\Omega =$ ....
- On lance un dé : les issues possibles sont ....
  L'univers est donc $\Omega =$ ....
- On lance trois fois de suite une pièce et on s'intéresse aux pile/face obtenus dans l'ordre : les issues possibles sont ....
  L'univers est donc $\Omega =$ ....
- On lance deux fois de suite un dé et on s'intéresse à la somme des chiffres obtenus : les issues possibles sont ....
  L'univers est donc $\Omega =$ ....
- On lance une pièce à pile ou face jusqu'à obtenir pile et on regarde le nombre de lancers effectués. L'univers est $\Omega =$ ....

Le nombre d'issues possibles de l'expérience est le cardinal de l'univers Ω, noté $|\Omega$ ou $\mathrm{Card}(\Omega)$ ou $\#\Omega$. Pour ce qui est du programme de première année, nous étudierons des univers **finis**. Notamment, nous ne nous intéresserons pas à des expériences comme le dernier exemple.

1.2 Évènements

Remarque.

Les deux orthographes "événement" et "évènement" sont acceptées depuis 1990, et l'Académie Française recommande même plutôt l'usage de "évènement". Quoi qu'il en soit, on prononce bien "évènement" avec un accent grave. En ce qui concerne l'orthographe, choisissez votre camp et essayez de rester cohérent.

Définition.

On considère une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω.
Un **évènement** est un ensemble d'issues. C'est donc une partie de Ω : c'est donc un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.
A la suite de l'expérience, on dira que l'**évènement** A **est réalisé** si l'issue ω de l'expérience est un élément de A ($\omega \in A$).

Exemple(s). On tire une carte au hasard dans un paquet de 32 cartes. L'univers Ω est donc l'ensemble des cartes, de cardinal 32.
L'évènement "Tirer un As" se compose de .... issues.
L'évènement "Tirer un Pique" se compose de .... issues.

Définition.

Dans un expérience aléatoire,
- L'évènement **impossible** est un évènement qui n'est jamais réalisé. Il est associé à l'ensemble vide $\emptyset$.
- L'événement **certain** est un évènement qui est toujours réalisé, peu importe l'issue de l'expérience. Il est associé à l'univers Ω tout entier.
- Un évènement **élémentaire** est un évènement qui comporte une seule issue. Il est donc associé à un singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$.

Exemple(s). On lance deux dés et on s'intéresse à la somme des dés.
L'évènement "La somme vaut 1" est ....
L'évènement "La somme vaut 2" est ....
L'évènement "La somme est plus petite que 12" est ....

Puisque les évènements sont des parties de Ω, on peut faire des opérations ensemblistes sur les événements :

Définition.

On considère une expérience aléatoire modélisée par un univers Ω. Soit A, B deux évènements.
- L'évènement $A \cup B$ se lit "**A ou B**" et correspond à l'évènement qui se réalise quand A se réalise ou B se réalise.
- L'évènement $A \cap B$ se lit "**A et B**" et correspond à l'évènement qui se réalise quand A se réalise et B se réalise.
- L'évènement $\overline{A}$ est appelé l'évènement **contraire** de A et correspond à l'ensemble des issues de Ω qui ne sont pas des issues de A.
- On dit que les deux évènements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$ à savoir si l'évènement $A \cap B$ est l'évènement impossible.
- L'inclusion $A \cup B$ traduit le fait que la réalisation de A entraîne celle de B.

Rappels ensemblistes. Tous les résultats vus dans le cadre du chapitre E3 s'appliquent encore. En particulier, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de Morgan).

Exemple(s). On tire simultanément 8 cartes dans un paquet de 32 cartes. On note A l'évènement "Tirer un Coeur", B l'évènement "Tirer une Dame" et C l'évènement "Tirer la Dame de Pique".

1. La réalisation de ...... entraîne celle de .... donc ...... $\subset$ ....
2. L'évènement $A \cup B$ est l'évènement ....
3. L'évènement $A \cap B$ est l'évènement ....
4. L'évènement $\overline{A}$ est l'évènement ....
5. Le contraire de l'évènement "toutes les cartes sont des Cœur" est ....

2 Probabilité sur un univers fini

Une fois que l'on a modélisé l'expérience, il faut encore préciser la chance qu'on a (ou pas !) de tomber sur une issue : c'est le rôle des probabilités.

2.1 Espace probabilisé

Définition.

Soit Ω un univers **fini**.
On appelle probabilité sur Ω une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :
1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

On dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un **espace probabilisé fini**. Si $A \subset \Omega$, on dit que $\mathbb{P}(A)$ est la **probabilité** de l'évènement A. Par définition, c'est un nombre entre 0 et 1.

Définir une probabilité

On suppose que $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. Pour définir une probabilité sur Ω, il suffit de se donner les valeurs de $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$ pour $i = 1, \dots, n$:
Si $p_1, \dots, p_n$ sont des nombres réels, **compris entre** 0 **et** 1 et tels que

$$p_1 + \cdots + p_n = 1,$$

alors, il existe une unique probabilité sur Ω telle que pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i.$$

Pour calculer la probabilité d'un évènement A, il suffit alors d'additionner les probabilités des évènements élémentaires qui le constituent :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

Pour définir une probabilité, on peut regrouper les probabilités dans un tableau : la première ligne donne les issues possibles et la deuxième ligne donne les probabilité des évènements élémentaires associés à chacune de ces issues. Il faut s'assurer que les probabilités sont positives et que leur somme vaut 1 :

Issue	ω_1	$\dots$	ω_n	Ω
Probabilité	p_1	$\dots$	p_n	$\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Savoir-faire.
Construire un modèle probabiliste, c'est modéliser une situation aléatoire par un univers Ω, puis définir une probabilité sur Ω. A partir d'un univers, on peut définir différents modèles probabilistes. Par exemple, si on lance une pièce à pile ou face,on peut choisir comme univers $\Omega = \{P, F\}$, mais il y a ensuite plein de façons de donner des probabilités, selon que la pièce soit équilibrée ou non.

Quand l'espace probabilisé n'est pas donné par l'énoncé, il est en général facile de le construire à partir des données de l'énoncé.

Exemple(s). 1. On lance un dé à 6 faces et on s'intéresse au chiffre obtenu. On considère l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On décide que chaque évènement élémentaire a la même probabilité. Les probabilités sont donc données par :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité						

Pour calculer la probabilité de l'évènement A : "Obtenir un nombre pair", il suffit d'additionner les probabilités des évènements élémentaires qui le constituent. Puisque $A = \{$..............................$\}$,

$$\mathbb{P}(A) = \text{...} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

2. Une urne contient 2 boules bleues, 3 boules blanches et 4 boules rouges. Les boules sont indiscernables. On tire au hasard une boule dans l'urne, et on s'intéresse à la couleur de la boule tirée. L'univers Ω est donc $\{\text{Bleu}, \text{Blanc}, \text{Rouge}\}$. Les probabilités sont données par :

Issue	Bleu	Blanc	Rouge
Probabilité			

La probabilité de l'événement A : "La boule n'est pas bleue" est donc ....
3. On lance une pièce à pile (0) ou face (1). L'univers est $\Omega = \{0, 1\}$. Si la pièce est équilibrée, on a

$$\mathbb{P}(\{0\}) = \mathbb{P}(\{1\}) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

Si la pièce n'est pas équilibrée, il suffit de connaître $p = \mathbb{P}(\{0\})$ puisqu'on a alors

$$\mathbb{P}(\{1\}) = \text{....................}$$

.

2.2 Un cas d'école : l'équiprobabilité

☞ Chapitre utile : E4 - Dénombrement.

Souvent, l'énoncé permet de dire que tous les évènements élémentaires ont la même probabilité (on dit qu'ils sont **équiprobables**) : une pièce ou un dé *équilibré*, des boules *indiscernables*, on pioche une carte *au hasard*, etc. :

Définition.

Soit Ω un univers fini. La **probabilité uniforme** sur Ω est l'unique probabilité qui donne la même valeur à tous les évènements élémentaires. On a donc, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

et pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$$

La probabilité uniforme modélise une situation d'**équiprobabilité**.

Dans ce cadre, les calculs de probabilités reviennent à calculer des cardinaux.

Exercice 1 On pioche deux cartes au hasard dans un paquet de 32 cartes. Toutes les mains sont donc équiprobables.

1. Il y a en tout .... mains possibles, donc la probabilité de chaque main est
$$\frac{........}{........}$$
2. On considère l'évènement A : "Piocher deux cœurs." Il y a .... paires avec 2 cœurs donc
$$\mathbb{P}(A) = \frac{.......}{.......} = \frac{.......}{.......}$$
3. On considère l'évènement B : "Piocher un roi et une dame". Une main avec un roi et une dame peut être assimilée à un couple du produit cartésien Rois $\times$ Dames. Il y a donc .... mains avec un roi et une dame et donc
$$\mathbb{P}(B) = \frac{.......}{.......} = \frac{.......}{.......}$$

2.3 Propriétés des probabilités

Les propriétés connues pour les cardinaux se généralisent aux probabilités :

PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux évènements.

- Probabilité de l'évènement impossible : $\mathbb{P}(\emptyset) =$.
- Probabilité de l'union :
$$\mathbb{P}(A \cup B) =$$
- Probabilité de l'évènement contraire :
$$\mathbb{P}(\overline{A}) =$$
- **Croissance** : Si $A \subset B$ alors $\mathbb{P}(A) \leq P(B)$.

Exercice 2 On lance consécutivement deux dés équilibrés. On modélise l'expérience par l'univers $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, que l'on munit de l'équiprobabilité. On a donc : pour tout $\omega \in \Omega$,
$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = ...$$

1. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres différents ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres impairs ou deux nombres inférieurs ou égaux à 4 ?