

Les questions sont décalées par rapport à la numérotation du CB.

Faire +9

## PROBLÈME 2

### Partie I

**Q10.**  $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  est bien une matrice tridiagonale; de plus  $a_1 = -1$  et  $b_1 = 1$  donc  $a_1 b_1 = -1$ ; de même,  $a_2 = -1$  et  $b_2 = 1$ , donc  $a_2 b_2 = -1$  et  $M_3$  vérifie bien les données de l'énoncé.

**Q11.**  $\text{rg}(M_3 - I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; donc  $\text{rg}(M_3 - I_3) = 2$

D'après le théorème du rang, on en déduit que  $\dim(\text{Ker}(M_3 - I_3)) = 1$ ; donc il existe un vecteur non nul  $U \in \text{Ker}(M_3 - I_3)$ ; c'est-à-dire qu'il existe un vecteur non nul  $U$  tel que  $M_3 U = U$  et donc que

$M_3$  admet la valeur 1 comme valeur propre réelle.

**Q12.**  $\chi_{M_3}(X) = \det(XI_3 - M_3) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 1 & X-1 & -1 \\ 0 & 1 & X-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ X-1 & 1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{vmatrix}$   
 $= (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & X-1 & -1 \\ 0 & 2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)((X-1)^2 + 2)$ ; donc  $\chi_{M_3}(X) = (X-1)(X^2 - 2X + 3)$

Le discriminant du polynôme  $X^2 - 2X + 3$  vaut  $-8$ , donc  $\chi_{M_3}(X)$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$

**Q13.**  $\chi_{M_3}(0) = \det(-M_3) = (-1)^3 \det(M_3) = -\det(M_3)$ ; donc  $\det(M_3) = 3$

**Q14.** Le polynôme  $X^2 - 2X + 3$  possède deux racines complexes conjuguées (donc distinctes).

Les valeurs propres de  $M_3$  étant les racines de  $\chi_{M_3}(X)$ , on peut dire que  $M_3$  possède trois valeurs propres complexes distinctes, dont une réelle (la valeur 1) et les deux autres conjuguées. (On peut montrer que ces dernières valeurs sont  $1 \pm i\sqrt{2}$ ).

Le polynôme caractéristique de  $M_3$  est donc scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$  ce qui prouve que

$M_3$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$

La somme des dimensions des sous-espaces propres vaut 3, donc

chaque sous-espace propre est de dimension 1

**Q15.** On reprend le calcul effectué en **Q11** :  $E_\lambda = \text{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ; donc  $E_\lambda = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

**Q16.**  $M_3 \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix} = (1 + i\sqrt{2}) \begin{pmatrix} p \\ i\sqrt{2} \\ -p \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} p + i\sqrt{2} & = & p + ip\sqrt{2} \\ -p + i\sqrt{2} - p & = & i\sqrt{2} - 2 \\ -i\sqrt{2} - p & = & -p - ip\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow p = 1$  On en déduit que la valeur  $1 + i\sqrt{2}$  est valeur propre

associée au vecteur propre  $\begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$  donc  $E_\mu = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

**Q17.** Soit  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  un vecteur propre de  $N = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  associé à la valeur propre  $z$ , alors  $NX = zX$ ; soit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = zx_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = zx_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = zx_3 \end{cases}$$

par les propriétés de la conjugaison, il vient :

$$\begin{cases} \overline{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3} = \overline{zx_1} \\ \overline{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3} = \overline{zx_2} \\ \overline{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3} = \overline{zx_3} \end{cases}$$

or  $N$  est une matrice à coefficients réels, donc on a :

$$\begin{cases} a_{11}\overline{x_1} + a_{12}\overline{x_2} + a_{13}\overline{x_3} = \overline{z}\overline{x_1} \\ a_{21}\overline{x_1} + a_{22}\overline{x_2} + a_{23}\overline{x_3} = \overline{z}\overline{x_2} \\ a_{31}\overline{x_1} + a_{32}\overline{x_2} + a_{33}\overline{x_3} = \overline{z}\overline{x_3} \end{cases}$$

Donc on a  $N\overline{X} = \overline{z}\overline{X}$ ; ce qui montre bien que  $\overline{X}$  est vecteur propre de  $N$  associé à la valeur propre  $\overline{z}$ .

On peut donc en déduire :  $E_{\overline{\mu}} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -i\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

### Partie II

**Q18.**  $\chi_{M_2}(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -b_1 \\ -a_1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - a_1b_1 = (X-1)^2 + 1 = (X-1-i)(X-1+i)$

**Q19.**  $a_1$  et  $b_1$  étant des réels vérifiant  $a_1b_1 = -1$ , le calcul précédent montre que  $\chi_{M_2}(X)$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$  et donc que  $M_2$  est ni diagonalisable, ni trigonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

**Q20.** Le polynôme caractéristique de  $M_2$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , donc  $M_2$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

**Q21.**  $\chi_{M_2}(0) = \det(-M_2) = (-1)^2 \det(M_2)$ ; donc  $\det(M_2) = 2$

### Partie III

**Q22.** Montrons par récurrence double que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est un entier naturel.

- *Initialisation* :  $F_0 = 1$  et  $F_1 = 1$ , donc la propriété est vraie pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

- *Hérédité* : On suppose que la propriété est vérifiée par  $F_n$  et  $F_{n+1}$ .

Par définition,  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , donc, par hypothèse de récurrence,  $F_{n+2}$  est la somme de deux entiers naturels; ainsi  $F_{n+2}$  est bien un entier naturel; ce qui établit l'hérédité.

- *Conclusion* : On a montré par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est un entier naturel.

**Q23.** L'équation caractéristique associée à  $(F_n)_{n \geq 0}$  est  $r^2 - r - 1 = 0$ , dont le discriminant vaut 5 et les racines sont  $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ; par théorème, il existe deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

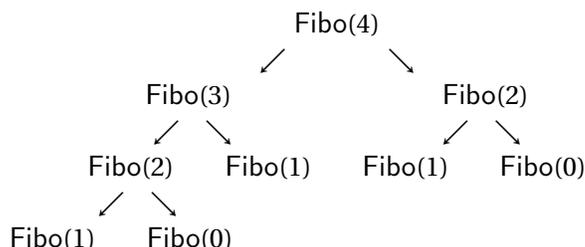
$$F_n = \lambda \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \mu \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$F_0 \text{ et } F_1 \text{ donnent : } \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\lambda + \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ (1+\sqrt{5})\lambda + (1-\sqrt{5})\mu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \sqrt{5}\lambda - \sqrt{5}\mu = 1 \end{cases}$$

On obtient :  $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$  et  $\mu = \frac{-\sqrt{5}+1}{-2\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$ ; donc :

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Q24. a)



b) Si on note  $F_n$  le nombre d'appels récursifs de  $Fibo(n)$ , alors on a  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  et la Q23 montre que la complexité de cette fonction est exponentielle.

c) On demande une version non récursive de meilleure complexité (linéaire ici) :

```

def FiboV2(n):
    a,b = 1,1
    for k in range(n):
        a,b = b,a+b
    return a
  
```

On aurait pu programmer une fonction récursive en version terminale (donc de complexité linéaire) de la manière suivante :

```

def FiboV3(n,a=1,b=1):
    if n==0:
        return a
    return FiboV3(n-1,b,a+b)
  
```

Q25.  $d_1 = |1| = \boxed{1}$  ;  $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ a_1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{2}$  et  $d_3 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 \\ 0 & a_2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a_1 b_1 - a_2 b_2 = \boxed{3}$

Q26. On a

$$\begin{aligned}
 d_{n+2} &= \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n+1} & 1 \end{vmatrix} = -a_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_{n+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -a_{n+1} b_{n+1} \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 1 & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix} ; \text{ or } a_{n+1} b_{n+1} = -1 \text{ donc :} \\
 &\boxed{d_{n+2} = d_{n+1} + d_n}
 \end{aligned}$$

Q27. On a  $d_1 = F_1 = 1$  ;  $d_2 = F_2 = 2$  de plus  $(d_n)_{n \geq 1}$  et  $(F_n)_{n \geq 1}$  vérifient la même relation de récurrence d'ordre 2, donc  $\forall n \geq 1, d_n = F_n$