Chapitre An5 : Éq. différentielles linéaires

Introduction

Une équation différentielle ordinaire (EDO) est une équation dont l'inconnue est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, qui fait intervenir des dérivées de f. Les EDO apparaissent naturellement en physique (équation du mouvement en mécanique, dans les circuits électrique, etc.), en biologie (évolution d'une population), en épidémiologie (modélisation d'une épidémie). Dans la plupart des cas, on ne sait pas résoudre explicitement les EDO. On doit alors utiliser des méthodes numériques. Dans ce cours, s'intéressera plus particulièrement aux équations différentielles linéaires. En première année, l'étude des EDL s'est arrêtée au cas des coefficients constants. Nous irons plus loin cette année et verrons quelques nouvells méthodes pour la recherches de solutions.

1 EDL d'ordre 1

Notation : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si l'on adopte la notation $\mathbb{K}$, c'est que tout marche pareil si l'on prend des coefficients réels ou complexes.

1.1 Définitions et résultats théoriques

Définition.

Une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur un intervalle I est une équation de la forme $(\mathcal{E}) : y' + a(x)y = b(x)$, où
- $y : I \to \mathbb{K}$ est l'inconnue de l'équation différentielle, c'est une fonction dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- $a : I \to \mathbb{K}$ est une application continue. Lorsque a est constante, on parle d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant ;
- b est une application continue. On dit que c'est le **second membre**.

Une application $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de $(\mathcal{E})$ si f est dérivable et si pour tout $x \in I$, $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$.

Remarque.

On peut aussi regarder des équations de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Si a ne s'annule pas, en divisant l'équation par a, elle est équivalente à l'équation

$$y' + \frac{b(x)}{a(x)}y = \frac{c(x)}{a(x)}$$

Notations. C'est une convention : on garde la variable x dans les fonctions de l'équation, sauf dans l'inconnue, souvent notée y, mais qui peut prendre n'importe quel nom.
La variable x est aussi souvent notée t. Sachez vous adapter à l'énoncé !

Exemple(s). L'équation pour la tension aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC est $R\frac{du}{dt} + \frac{1}{C}u = \frac{1}{C}u_\infty$, que l'on peut réecrire $u' + \frac{1}{RC}u = \frac{1}{RC}u_\infty$. C'est une EDL d'ordre 1 à coefficients constants.

Définition.

On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle linéaire avec des conditions initiales. Dans le cas de l'ordre 1, un problème de Cauchy possède une unique condition initiale et peut s'écrire :

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où, avec les notations précédentes, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$ ou $\mathbb{C}$.

THÉORÈME DE CAUCHY-LIPSCHITZ DANS CE CADRE

Soit I un intervalle, $a : I \to \mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ des applications continues. On considère $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une **unique** solution.

Remarque.

L'unicité est tout aussi importante que l'existence. Voir par exemple le cours sur les développements en série entière.

1.2 Résolution de l'équation homogène

Définition.

Une équation différentielle d'ordre 1 est dite **homogène** si le second membre est nulle.
Si $y' + a(x)y = b(x)$ est une EDL d'ordre 1, son équation homogène associée est l'équation $y' + a(x)y = 0$.

Résolution de l'équation homogène - Cas constant

Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors, les solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sont les applications de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-ax}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Autrement dit, l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Résolution de l'équation homogène - Cas général

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue. On considère A une primitive de a. Alors, les solutions de l'équation $y' + a(x)y = 0$ sont les applications de la forme $x \in \mathbb{R} \mapsto \lambda e^{-A(x)}$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$. Autrement dit, l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto \lambda e^{-A(x)}, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Remarque.

Si $x_0 \in I$, $A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt$ est une primitive de a.

Démonstration. En classe.

Corollaire — L'ensemble des solutions d'une EDL homogène d'ordre 1 est un espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, c'est une droite vectorielle.

Exemple(s). Déterminer l'ensemble des solutions de $y' + xy(x) = 0$.

Erreur fréquente.

Pour ne pas se tromper dans le signe, on dérive la solution que l'on veut proposer pour vérifier que c'est effectivement la solution !

1.3 Résolution dans le cas général

Proposition — *Principe de superposition.* Soit $a : I \to \mathbb{K}$ continue et $b_1, b_2 : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues. Si f_i est solution de $y' + a(x)y = b_i(x)$ pour $i = 1, 2$, alors $f_1 + f_2$ est solution de $y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration. En classe.

Corollaire — Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues. On suppose connue une solution particulière de $f : I \to \mathbb{K}$ de $y' + a(x)y = b(x)$. Alors, les solutions de l'équation $y' + a(x)y = b(x)$ sont les applications $x \in I \mapsto f(x) + \lambda e^{-A(x)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ où A est une primitive de a sur I.

Démonstration. En classe.

On retiendra le fait suivant : les solutions sont de la forme

$$\boxed{\text{Solution particulière} + \text{Solutions de l'équation homogène}}$$

Savoir-faire.

Pour résoudre l'équation $y' + a(x)y = b(x)$:

- On résout l'équation homogène.
- On trouve une solution particulière f_0. Cela est possible dans certains cas.
- On les additionne.

Si de plus, on veut résoudre un problème de Cauchy, avec condition initiale $y(x_0) = y_0$, il faut calculer la bonne constante pour la solution de l'équation homogène en résolvant une équation du premier degré (donc simple).

Remarque.

Cas important : Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficient constant et second membre constant.
L'équation $y' + ay = b$ possède une solution constante : il suffit de faire $y' = 0$ et de trouver $y = \frac{b}{a}$ comme solution particulière.

Exercice 1 Recharge d'un condensateur. On recharge un condensateur initialement chargé avec une tension $U(0) = V_0$, en branchant un générateur qui impose une tension E. La tension aux bornes du condensateur vérifie l'équation $Ry' + \frac{y}{C} = \frac{E}{C}$. Déterminer $U(t)$ au cours du temps et calculer sa limite quand $t \to +\infty$. Tracer le graphe de la solution.

1.4 Méthode de variation de la constante

2 EDL d'ordre 2

2.1 Définition et résultats théoriques

Définition.

Une équation différentielle d'ordre 2 sur un intervalle I est une équation de la forme

$$(\mathcal{E}) : y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$$

où

- y est l'inconnue : c'est une fonction deux fois dérivable sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$;
- $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des applications continues (ce sont les coefficients) ;
- $c : I \to \mathbb{K}$ est une application continue (c'est le **second membre**).

Une application $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de $(\mathcal{E})$ si f est deux fois dérivable et si pour tout $x \in I$, $f''(x) + a(x)f'(x) + b(x)f(x) = c(x)$.

Remarque.

On peut aussi regarder des équations de la forme $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Si a ne s'annule pas, en divisant l'équation par a, elle est équivalente à une équation de la définition.

Définition.

On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle ordinaire avec des conditions initiales. Dans le cas de l'ordre 2, un problème de Cauchy possède deux conditions initiales, portant sur la valeur de y et de y' et peut s'écrire :

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

où, avec les notations précédentes, $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$.

Théorème de Cauchy-Lipschitz dans ce cadre

Soit I un intervalle et $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des applications continues. On considère $x_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{K}$. Alors, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

possède une **unique** solution.

2.2 Résolution de l'équation homogène

Définition.

Une équation différentielle linéaire d'ordre 2 est dite **homogène** si le second membre est nulle.
Si $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ est une EDL d'ordre 2, son équation homogène associée est l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$.

Erreur fréquente.
Il est en général difficile de résoudre une équation différentielle lorsque les coefficients ne sont pas constants.

En général, on pourra simplement dire que

Stucture de l'ensemble de solutions

Soit I un intervalle et $a, b : I \to \mathbb{K}$ continue. On note E l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbb{K}$ de l'équation différentielle $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$. Alors E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension 2**.

Rappel dans le cas des coefficients constants

Définition.

Soit $a, b \in \mathbb{K}$. On considère l'EDL homogène d'ordre 2, $y'' + ay' + by = 0$. Son **équation caractéristique** est l'équation $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r.

C'est une équation polynomiale de degré 2. On notera $\Delta = a^2 - 4b$ son discriminant. Ses racines jouent un rôle crucial dans la résolution de l'équation homogène. Contrairement au cas de l'ordre 1 où le fait de travailler avec des fonctions à valeurs réelles ou complexes ne change rien à l'étude, dans le cas de l'ordre 2, il faudra faire attention au contexte, car les 2 situations diffèrent.

Résolution de l'équation homogène. Cas complexe.

On reprend les notations précédentes. a et b peuvent être complexes. Les solutions **à valeurs complexes** de l'équation $y''+ay'+by = 0$ sont décrites ci-dessous.

- Si $\Delta \neq 0$, on note r_1, r_2 les deux racines **complexes** de l'équation caractéristique. Les solutions sont alors les applications de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
- Si $\Delta = 0$, on note r l'unique racine. Les solutions sont alors les applications de la forme $x \mapsto \lambda e^{rx} + \mu x e^{rx}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Ce théorème donne donc une base de l'ensemble des solutions.

Résolution de l'équation homogène. Cas réel.

On reprend les notations précédentes. a et b sont nécessairement réels. Les solutions **à valeurs réelles** de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ sont décrites ci-dessous.

- Si $\Delta > 0$, on note r_1, r_2 les deux racines réelles de l'équation caractéristique. Les solutions sont alors les applications de la forme $x \mapsto \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, on note r l'unique racine. Les solutions sont alors les applications de la forme $x \mapsto \lambda e^{rx} + \mu x e^{rx}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, les deux racines sont complexes conjuguées et s'écrivent $-\frac{a}{2} \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. On note $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$. Les solutions sont alors les applications de la forme
$$x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))e^{-\frac{a}{2}x}$$
avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Ce théorème donne donc une base de l'ensemble des solutions.

La grande différence réside donc dans le cas $\Delta < 0$. Lorsque $a, b \in \mathbb{R}$, si $\Delta < 0$, soit on cherche des solutions à valeurs complexes et le premier théorème s'applique, soit à valeurs réelles et il faut donc appliquer ce dernier théorème.

Lorsque l'on cherche à résoudre un problème de Cauchy associé, il faut alors trouver les bonnes constantes λ, μ.

2.3 Résolution dans le cas général

2.3.1 Principes généraux.

Proposition — *Principe de superposition.* Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues et $c_1, c_2 : I \to \mathbb{K}$ deux applications continues. Si f_i est solution de $y'' + a(x)y' + b(x)y = c_i(x)$ pour $i = 1, 2$, alors $f_1 + f_2$ est solution de $y'' + a(x)y' + b(x)y = c_1(x) + c_2(x)$.

Corollaire — Soit $a, b, c : I \to \mathbb{K}$ des applications continues. On suppose connue une solution particulière de $f : I \to \mathbb{K}$ de $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$. Alors, les solutions de l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$ sont les applications de la forme $x \mapsto f(x) + g(x)$ où g est une solution de l'équation homogène.

On retiendra le fait suivant : les solutions sont de la forme

$$\boxed{\text{Solution particulière} + \text{Solutions de l'équation homogène}}$$

Savoir-faire.

Pour résoudre l'équation $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$:

- On résout l'équation homogène.
- On trouve une solution particulière f_0. Cela est possible dans certains cas, mais c'est en général difficile, voire impossible (sauf pour le cas constant). A l'exception du cas constant, la recherche d'une solution particulière devrait être guidée.
- On les additionne : cela donne toutes les solutions.

Si de plus, on veut résoudre un problème de Cauchy, avec conditions initiales $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_1$, il faut calculer la solution de l'équation homogène qui convient. Cela revient à résoudre un système de deux équations à 2 inconnues.

2.4 Zoologie : quelques méthodes de recherches de solutions

2.4.1 Seconds membres particuliers pour les EDL à coefficients constants

On fixe $a, b \in \mathbb{K}$ et on s'intéresse à l'EDL $y''+ay'+by = c(x)$ pour des applications c de formes particulières.

•**Second membre constant.** On sait déjà traiter le cas du second membre nul. Lorsque le second membre est une fonction constante $c(x) = c$ et que $b \neq 0$, il existe toujours une solution constante : c'est $\frac{c}{b}$. En effet, c'est clairement une solution de $y'' + ay' + by = c$ puisque $y' = 0$ et $y'' = 0$.

Exercice 2 Résoudre le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} y'' + 9y = 1 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

•**Second membre de la forme** $Ae^{\alpha x}$.
On considère $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et A un réel ou complexe non nul. On peut trouver une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = Ae^{\alpha x}$. Il faut distinguer les cas selon que α est ou pas racine de l'équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

- Si ce n'est pas une racine, on peut trouver une solution de la forme $me^{\alpha x}$.
- Si c'est une racine simple (i.e. $\Delta > 0$), on peut trouver une solution de la forme $mxe^{\alpha x}$
- Si c'est une racine double(i.e. $\Delta = 0$), on peut trouver une solution de la forme $mx^2e^{\alpha x}$

Dans tous les cas, il faut trouver la valeur de m, en fonction de A, a, b et α.

Exercice 3 Trouver une solution de $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x}$

•**Second membre de la forme** $A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. On considère $a, b \in \mathbb{R}$, A, B deux réels et $\omega > 0$. On peut trouver une solution particulière de l'équation $y'' + ay' + by = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$. Il faut distinguer deux cas.

- Si c'est l'équation de l'oscillateur harmonique non amorti $a = 0$ et $b = \omega_0^2 > 0$) et que $\boxed{\omega = \omega_0}$, on peut trouver une solution de la forme $A_2x\cos(\omega x) + B_2x\sin(\omega x)$.
- Dans tous les autres cas, il y a une solution de la forme $A_2\cos(\omega x)+B_2\sin(\omega x)$.

Dans tous les cas, il faut trouver la valeur de A_2 et B_2, en fonction de A, B, a, b et ω.

2.4.2 Recherche de solutions polynomiales

2.4.3 Recherche de solutions DSE

2.4.4 Résolution par abaissement d'ordre

2.4.5 Résolution par changement de variable

3 Systèmes d'équations différentielles

3.1 Le systèmes $X' = AX$

3.2 Résolution en pratique

3.3 Lien entre EDL d'ordre n à coefficients constants et système linéaires différentiels à n équations

Application : Résolution de l'équation homogène d'ordre 2.

On traite le cas réel. On considère $\boxed{a, b \in \mathbb{R}}$ et on cherche à déterminer l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène :

$$\boxed{(\mathcal{E})\ :\ y'' + ay' + by = 0}$$

Étape 1 : Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de $\mathcal{E}$. On introduit le vecteur $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$. Par le cours [1], $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est solution de

$$Y' = AY \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Étape 2 : On cherche donc à résoudre $Y' = AY$.

1. On commence par voir si A est diagonalisable.

   - On calcule

   $$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & -1 \\ b & X+a \end{vmatrix} = X(X+a) + b = X^2 + aX + b$$

   - Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A : on est donc amenés à résoudre l'équation $\chi_A(r) = 0$, d'inconnue $r \in \mathbb{R}$, soit encore l'équation

   $$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$$

   On retrouve **l'équation caractéristique** de $\mathcal{E}$! Il n'y a en fait rien de surprenant puisque c'est de là qu'elle vient !

   - On est donc amené à distinguer les cas selon la valeur du discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

On finit alors la résolution dans chacun des cas $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

1. Vous devez néanmoins être capables de refaire ce calcul

$\boxed{\text{Cas } \Delta > 0}$

2. Dans ce cas, l'équation $r^2 + ar + b = 0$ possède deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 qui sont les deux valeurs propres de A. χ_A étant scindé à racines simples, A est diagonalisable et l'on peut écrire

$$A = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

3. Pour résoudre $Y' = AY$, on introduit la nouvelle inconnue $X = P^{-1}Y$. Par le cours [2], X est solution de $X' = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} X$.

4. Si l'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a donc le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = r_1 x_1 \\ x_2' = r_2 x_2 \end{cases}$$

Ainsi, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{r_1 t}\alpha_1 \\ x_2(t) = e^{r_2 t}\alpha_2 \end{cases}$$

5. On revient alors à $Y = PX$. Notons

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{r_1 t}\alpha_1 \\ e^{r_2 t}\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a\alpha_1)e^{r_1 t} + (b\alpha_2)e^{r_2 t} \\ (c\alpha_1)e^{r_1 t} + (d\alpha_2)e^{r_2 t} \end{pmatrix}$$

Étape 3 : y étant la première coordonnée de Y et puisque α_1 et α_2 sont quelconque, en posant $\lambda_1 = a\alpha_1$ et $\lambda_2 = b\alpha_2$, on trouve que y est de la forme

$$\boxed{y(t) = \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t}}$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de $\mathcal{E}$.

2. Vous devez néanmoins être capables de refaire ce calcul

$\boxed{\textbf{Cas } \Delta = 0}$

2. Dans ce cas, χ_A possède une racine double, disons $r_0 \in \mathbb{R} : \chi_A(X) = (X - r_0)^2$. Si la matrice A était diagonalisable, on aurait

$$\dim \ker(A - r_0 I_2) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

et donc $A - r_0 I_2 = 0$ ou encore $A = r_0 I_2$ ... ce qui n'est manifestement pas le cas ! Donc A n'est pas diagonalisable. Qu'à cela ne tienne, χ_A reste scindé donc A est trigonalisable : il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = P \begin{pmatrix} r_0 & \alpha \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

3. Pour résoudre $Y' = AY$, on introduit la nouvelle inconnue $X = P^{-1}Y$. Par le cours[3], X est solution de $X' = \begin{pmatrix} r_0 & \alpha \\ 0 & r_0 \end{pmatrix} X$.

4. Si l'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a donc le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = r_0 x_1 + \alpha x_2 \\ x_2' = r_0 x_2 \end{cases}$$

On résout ce système différentiel triangulaire en le remontant :

- Puisque $x_2' = r_0 x_2$, il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x_2(t) = e^{r_0 t}\alpha_2$.
- x_1 est alors solution de $x_1' = r_0 x_1 + \alpha\alpha_2 e^{r_0 t}$. C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 : on sait faire !
  - L'équation homogène associée est $x_1' = r_0 x_1$, donc les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda e^{r_0 t}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
  - On cherche une solution particulière x_p à l'aide de la méthode de variation de la constante : on cherche une solution de la forme $x_p(t) = \lambda(t) e^{r_0 t}$. On calcule alors

$$x_p'(t) = \lambda'(t) e^{r_0 t} + \lambda(t) r_0 e^{r_0 t} = \lambda'(t) e^{r_0 t} + r_0 x_p(t)$$

On en déduit que x_p est solution de $x_1' = r_0 x_1 + \alpha\alpha_2 e^{r_0 t}$ si et seulement si

$$\lambda'(t) e^{r_0 t} = \alpha\alpha_2 e^{r_0 t} \iff \lambda'(t) = \alpha\alpha_2$$

On peut donc prendre $\lambda(t) = \alpha\alpha_2 t$ et l'on trouve que $x_p(t) = \alpha\alpha_2 t e^{r_0 t}$ est solution particulière.

  - x_1 étant de la forme $\boxed{x_p + \text{ solution de l'équation homogène}}$, on en déduit alors qu'il existe $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_1(t) = \alpha_1 e^{r_0 t} + (\alpha\alpha_2) t e^{r_0 t}$$

5. On revient alors à $Y = PX$. Notons

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{r_0 t} + (\alpha\alpha_2) t e^{r_0 t} \\ e^{r_0 t}\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\left(\alpha_1 e^{r_0 t} + (\alpha\alpha_2) t e^{r_0 t}\right) + (b\alpha_2) e^{r_0 t} \\ c\left(\alpha_1 e^{r_0 t} + (\alpha\alpha_2) t e^{r_0 t}\right) + (d\alpha_2) e^{r_0 t} \end{pmatrix}$$

Étape 3 : y étant la première coordonnée de Y, on a

$$y(t) = (a\alpha_1 + b\alpha_2) e^{r_0 t} + a\alpha\alpha_2 t e^{r_0 t}$$

et puisque α_1 et α_2 sont quelconque, en posant $\lambda_1 = a\alpha_1 + b\alpha_2$ et $\lambda_2 = a\alpha\alpha_2$, on trouve que y est de la forme

$$\boxed{y(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t) e^{r_0 t}}$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de $\mathcal{E}$.

3. Vous devez néanmoins être capables de refaire ce calcul

$\boxed{\textbf{Cas } \Delta < 0}$

C'est le cas le plus subtil, mais sûrement le plus intéressant puisque l'on rencontre très souvent cette équation (oscillateur harmonique non amorti ou faiblement amorti).

2. Dans ce cas, χ_A possède deux racines complexes conjuguées, z et $\overline{z}$ (A est alors diagonalisable sur $\mathbb{C}$ *(mais bien évidemment pas sur $\mathbb{R}$!)*.

   Notons $U = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ le vecteur propre de A associée à la valeur propre z et notons $\overline{U} = \begin{pmatrix} \overline{w_1} \\ \overline{w_2} \end{pmatrix}$. On a en fait, puisque A est à coefficient réels et que $AU = zU$,

$$A\overline{U} = \overline{AU} = \overline{AU} = \overline{zU} = \overline{z}\overline{U}$$

   de sorte que $\overline{U}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\overline{z}$[4].

   On peut donc diagonaliser A en prenant $P = \begin{pmatrix} w_1 & \overline{w_1} \\ w_2 & \overline{w_2} \end{pmatrix}$ et écrire que

$$A = P \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} P^{-1}$$

3. On introduit la nouvelle inconnue $X = P^{-1}Y$. *Attention, X est désormais à valeurs complexes, alors que Y est à valeurs réelles.* Par le cours[5], X est solution de $X' = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \overline{z} \end{pmatrix} X$.

4. Si l'on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, on a donc le système différentiel

$$\begin{cases} x_1' = zx_1 \\ x_2' = \overline{z}x_2 \end{cases}$$

   Ainsi, il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{zt}\alpha_1 \\ x_2(t) = e^{\overline{z}t}\alpha_2 \end{cases}$$

5. On revient alors à $Y = PX$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$Y(t) = \begin{pmatrix} w_1 & \overline{w_1} \\ w_2 & \overline{w_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{zt}\alpha_1 \\ e^{\overline{z}t}\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (w_1\alpha_1)e^{zt} + (\overline{w_1}\alpha_2)e^{\overline{z}t} \\ (w_2\alpha_1)e^{zt} + (\overline{w_2}\alpha_2)e^{\overline{z}t} \end{pmatrix}$$

Étape 3 : y étant la première coordonnée de Y, on a donc

$$y(t) = (w_1\alpha_1)e^{zt} + (\overline{w_1}\alpha_2)e^{\overline{z}t}$$

Mais puisque y est à valeurs réelles, on a $y(t) = \mathrm{Re}(y(t))$.
On rappelle par ailleurs que si $\boxed{z = r_0 + i\omega}$ avec $r_0 \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{zt} = e^{r_0 t}e^{i\omega t} = e^{r_0 t}(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t))$$

et

$$e^{\overline{z}t} = \overline{e^{zt}} = e^{r_0 t}(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))$$

En développant les calculs, on peut alors montrer qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\boxed{y(t) = e^{r_0 t}\left(\lambda\cos(\omega t) + \mu\sin(\omega t)\right)}$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est bien solution de $\mathcal{E}$.

....

Remarque.

L'étude du cas complexe est similaire, et même légèrement plus simple puisqu'il suffit de traiter les cas $\Delta \neq 0$ (analogue au cas réel $\Delta > 0$ et $\Delta = 0$, qui se traitent de façon analogue.

4. C'est un fait utile, bon à garder en tête
5. Vous devez néanmoins être capables de refaire ce calcul