Programme de khôlle. Semaine 13

Description des thèmes

P2 - Probabilité sur un univers dénombrable

1) Notion d'ensemble dénombrable. Un ensemble dénombrable est en bijection avec $\mathbb{N}$. On peut énumérer les éléments d'un ensemble dénombrable : $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont dénombrables. Les intervalles ne sont pas dénombrables.

2) Probabilité sur un univers dénombrable

   1. L'ensemble des événements $\mathcal{P}(\Omega)$ et le vocabulaire associé : Événement, issue, événement élémentaire, événement certain, événement impossible. Événement incompatibles. Événements contraire.
   2. Famille dénombrable d'événements : union et intersection.
   3. Définir une probabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$. On définit une probabilité en donnant les probabilités des événements élémentaires. Un exemple sur $\mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$. Un autre exemple : justifier qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\alpha}{2^n}$ est une probabilité.
   4. Propriétés d'une probabilité : Probabilité de $\emptyset$: probabilité d'une union de deux événements, probabilité d'une union disjointe dénombrable, probabilité du complémentaire, croissance des probabilités.

3) Indépendance et conditionnement. Les notions vues en première année se généralisent au cas de l'univers dénombrable.

   1. Probabilité conditionnelle : Extension de la définition dans le cas d'un univers dénombrable. Formule des probabilités composées. Formule de Bayes.
   2. Formule des probabilités totales
      - Système complet d'événements en nombre fini ou dénombrable
      - Formule des probabilités totales
   3. Indépendance
      - Cas de deux événements. Exemple avec un univers dénombrable : $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\alpha}{n^2}$ pour$A_i = \{n, i|n\}$. A_2 et A_3 sont indépendants.
      - Indépendance mutuelle d'une famille d'événements. Exemple : On tire un nombre au hasard entre 1 et 30. A_i : le nombre est multiple de i. A_2, A_3 et A_5 sont mutuellement indépendants.
      - Indépendance mutuelle $\implies$ indépendance deux à deux. La réciproque est fausse.
   4. Marche aléatoire à deux états. Établir la formule de récurrence. Exprimer le n-ième terme d'une suite arithmético-géométrique à l'aide d'indications sur la suite géométrique à considérer.

An5 - Équations différentielles linéaires

Voir `https://cahier-de-prepa.fr/tsi2-doisneau/download?id=1683`

1) EDL d'ordre 1 : $y' + a(x)y = b(x)$.

- Généralités. Définitions : EDL d'ordre 1, problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz
- Équation homogène et sa résolution. Définition. Résolution de l'équation homogène à coefficient constant (rappels). Cas général. Structure de l'ensemble des solutions
- Résolution dans le cas général. Principe de superposition. Structure de l'ensemble des solutions : $\boxed{\text{solution particulière + solutions de l'équation homogène}}$. Plan de résolution.
- Rappel : solution particulière quand a et b sont constants. Le cas de l'équation $y' + \frac{1}{\tau}y = y_\infty$ doit être maîtrisé. Graphe à connaître.
- Méthode de variation de la constante. Méthode générale. Exemple 1 : sur $I =]0, +\infty[$, $y' - \frac{y}{x} = x^2$. Exemple 2 : $y' - y = x^2 e^x$.
- Application : les seconds membres particuliers au programme de TSI1 pour les équations à coefficients constants peuvent se retrouver avec la variation de la constante : $b(x) = e^{\alpha x}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$, $b(x) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ (cas particuliers de $e^{i\omega t}$)

2) EDL d'ordre 2. Rien a été revu en classe. Il a cependant été demandé aux étudiants de revoir, notamment à l'aide du poly, un cas particulier du programme de TSI1 : **les équations d'ordre 2 à coefficients constants et second membre constant**

$$y'' + ay' + b = c$$

Questions de cours

La khôlle commencera nécessairement par la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **homogène** à coefficients constants au choix du khôlleur. Les coefficients devront être réels et les solutions cherchées sont à valeurs réelles.

Le kholleur fera ensuite son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** :
  1. Montrer que l'on peut définir une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ en posant $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{\lambda}{n^2}$ où λ est un nombre que l'on déterminera.
  2. On note A_2 (resp. A_3) l'événement : "obtenir un multiple de 2 (resp. 3)". Montrer que A_2 et A_3 sont indépendants.
- **Panier 2** On tire un nombre au hasard entre 1 et 30. On note A_2 (resp. A_3, A_5), l'événement :" le nombre tiré est un multiple de 2 (resp. 3,5)". Montrer que A_2, A_3 et A_5 sont mutuellement indépendants.
- **Panier 3** : On considère un système à deux états A et B. Le système est initialement dans l'état A avec une probabilité p_0. On suppose qu'à chaque instant n, le système passe de l'état A à B avec probabilité $p_{A\to B}$ et de B à A avec probabilité $p_{B\to A}$. On note p_n la probabilité que le système soit dans l'état A à l'instant n.
  1. Traduire la situation par un graphe de transition.
  2. Montrer qu'il existe deux réels a et b à déterminer tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = ap_n + b$.

3. On suppose que $a \neq 1$ et on pose $\ell = \frac{b}{1-a}$. Montrer que la suite $u_n = p_n - \ell$ est géométrique.
4. En déduire une expression de (p_n) puis sa limite, en supposant que $|a| < 1$.

- **Panier 4** : Soit I un intervalle, $a : I \to \mathbb{R}$ continue. On note A une primitive de a sur I. Montrer que les solutions de l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ sont les applications $x \in I \mapsto \lambda e^{-A(x)}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur les chapitres de la semaine.