An6 - Courbes paramétrées

Formule de dérivation

1 - On considère une fonction vectorielle $\overrightarrow{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $||\overrightarrow{f}(t)|| = 1$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{f}(t)$ et $\overrightarrow{f}'(t)$ son orthogonaux.
2. On suppose de plus que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $||\overrightarrow{f}'(t)|| = 1$.
   a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{f}'(t)) = 1$.
   b) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{f}''(t)$ et $\overrightarrow{f}(t)$ sont colinéaires.

Courbes paramétrées

2 - On considère la courbe paramétrée suivante

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étudier et tracer l'allure de cette courbe.
2. Montrer que le point $M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce.
3. Calculer la longueur de cette courbe sur $[0, 2\pi]$.

3 - On considère la courbe paramétrée suivante

$$\begin{cases} x(t) = \sin(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Étudier et tracer l'allure de cette courbe.

4 -On considère la courbe paramétrée suivante

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t) \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étudier et tracer l'allure de cette courbe.
2. Montrer que le point $M(\frac{3\pi}{2})$ est un point de rebroussement de première espèce.
3. Calculer la longueur de cette courbe sur $[0, 2\pi]$.

5 - On considère la courbe paramétrée suivante

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Étudier et tracer l'allure de cette courbe.
2. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x^2(t)+y^2(t) = 1$. En déduire la figure géométrique que représente cette courbe.

6 -On considère la courbe paramétrée suivante

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{t(1-t)^2}{1+t^2} \end{cases} , \quad t \in \mathbb{R}$$

Étudier et tracer l'allure de cette courbe.

Un problème de concours

7 - *Inspiré de CCINP 2017.* On considère deux fonctions f et g de la variable réelle t, définies par

$$f(t) = \frac{t^2}{1-t^2} \text{ et } g(t) = \frac{t^3}{1-t^2}$$

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Toutes les coordonnées seront données dans ce repère.

On notera $M(t)$ le point de coordonnées $(f(t), g(t))$.

I - Étude des deux fonctions

1. Déterminer les ensembles de définition de f et g. On le note D.
2. Calculer $f(\sqrt{3})$ et $g(\sqrt{3})$.

3. Justifier que f est paire et g impaire. Que peut-on en déduire pour le point $M(-t)$ de C par rapport au point $M(t)$.

4. Donner un équivalent simple de f et g en $+\infty$ et en déduire les deux limites $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t)$.

5. Déterminer les 4 limites suivantes :

$$\lim_{t\to 1^-} f(t)\ ;\ \lim_{t\to 1^+} f(t)\ ;\ \lim_{t\to 1^-} g(t)\ ;\ \lim_{t\to 1^+} g(t)$$

6. Justifier que f et g sont dérivables sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. Montrer, **en détaillant vos calculs**, que pour t dans $[0,1[\cup]1,+\infty[$, $f'(t)$ et $g'(t)$ sont donnés par

$$f'(t) = \frac{2t}{(1-t^2)^2} \text{ et } g'(t) = \frac{t^2(3-t^2)}{(1-t^2)^2}$$

7. Déduire des questions précédentes les tableaux de variations de f et g sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$. On y fera figurer les limites.

On note C la courbe paramétrée $(f(t),g(t))$ pour $t \in D$.

II - Tangentes à l'origine et en $M(\sqrt{3})$.

8. Déterminer les développements limités des fonctions f et g en 0 à l'ordre 3.

9. Sans calculer les dérivées secondes f'' et g'', montrer que $f''(0) = 2$ et $g''(0) = 0$. Préciser le théorème utilisé.

10. En déduire les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à C en l'origine.

11. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à C en $M(\sqrt{3})$.

III - Une asymptote

12. Sachant que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = -1$ et $\lim_{t\to+\infty} g(t) = +\infty$, donner une interprétation graphique de la courbe C vis-à-vis de la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$. Dessiner sur la copie l'allure de la courbe C et la droite d'équation $x = -1$ au voisinage de $t = +\infty$.

On note $\mathcal{D}$ la droite du plan d'équation $y = x - \frac{1}{2}$. On notera $N(t)$ le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse vaut $f(t)$.

13. Déterminer l'ordonnée $y_{N(t)}$ de $N(t)$ de fonction de $f(t)$.

Dans la suite, on se propose d'étudier la distance $g(t) - y_{N(t)}$, qui représente la distance algébrique entre $M(t)$ et $N(t)$.

14. On considère dans $[0,1[\cup]1,+\infty[$, la fonction $d(t) = g(t) - f(t) + \frac{1}{2}$.
  a) Factoriser le polynôme du second degré $P(x) = -2x^2 + x + 1$.
  b) Déterminer 3 réels a, b, c tels que $2x^3 - 3x^2 + 1 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.
  c) En déduire que pour tout t dans $[0,1[\cup]1,+\infty[$,

$$d(t) = \frac{P(t)}{2(t+1)}$$

15. Quel est le signe de $d(t)$ lorsque t est dans un voisinage de 1.

16. Que vaut $\lim_{t\to 1}(g(t) - y_{N(t)})$? Dessiner sur la copie l'allure de la courbe au voisinage de $t = 1$.

IV - Tracé de la courbe

On souhaite tracer la courbe C.

17. On veut commencer par tracer la courbe C_1 constituée de l'ensemble des points $M(t)$ pour t dans $[0,1[\cup]1,+\infty[$.
  a) Tracer la droite $\mathcal{D}$, ainsi que la droite d'équation $x = -1$.
  b) Placer le point $M(0)$ puis placer approximativement le point $M(\sqrt{3})$ (on considèrera que $\sqrt{3} \simeq 1,73$).
  c) Esquisser en bleu (ou noir) la courbe C_1, en utilisant notamment les informations obtenues précédemment.

18. Expliquer comment tracer la courbe C_2 constituée de l'ensemble des points $M(t)$ pour t dans $]-\infty,-1[\cup]-1,0]$ puis tracer en rouge la courbe C_2.