Chapitre An6 : Courbes paramétrées

Dans ce chapitre, nous étudierons des fonctions dites vectorielles $f : I \to \mathbb{R}^2$ ou $f : I \to \mathbb{R}^3$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Le plan $\mathbb{R}^2$ sera muni de son produit scalaire usuelle, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et de sa base canonique orientée naturelle. Il en sera de même pour $\mathbb{R}^3$. Un vecteur de $\mathbb{R}^2$ sera donc représenté par ses 2 coordonnées (x, y) et un vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera représenté par ses trois coordonnées (x, y, z).

1 Fonctions vectorielles

1.1 Définitions

Définition.

Une **fonction vectorielle** à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est une application $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^2$. Pour tout $t \in I$, on peut écrire $\overrightarrow{f}(t) = (x(t), y(t))$. Les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$ et $y : I \to \mathbb{R}$ sont appelées les **fonctions coordonnées** de $\overrightarrow{f}$.

Définition.

Une **fonction vectorielle** à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ est une application $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^3$. Pour tout $t \in I$, on peut écrire $\overrightarrow{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$, $y : I \to \mathbb{R}$ et $z : I \to \mathbb{R}$ sont appelées les **fonctions coordonnées** de $\overrightarrow{f}$.

Remarque.

La principale application de ce chapitre est l'étude cinématique des objets en mécanique classique. A ce titre, la variable sera le plus souvent notée t, en référence au temps.

Exemple. Une balle est lâchée de l'altitude z_0. On néglige les frottements. On choisit l'origine de sorte que $x_0 = y_0 = 0$. La fonction vectorielle $t : [0, z_0] \mapsto (0, 0, z_0 - \frac{1}{2}gt^2)$ décrit le mouvement de la balle jusqu'à ce qu'elle touche le sol.

Définition.

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou $n = 3$ une fonction vectorielle.
- Soit $a \in I$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est continue en a si les n fonctions coordonnées le sont.
- On dit que $\overrightarrow{f}$ est continue sur I si les n fonctions coordonnées le sont.

Remarque.

Pour étudier la continuité d'une fonction vectorielle, on se ramène donc à l'étude d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction de l'exemple précédent est continue.

Définition.

Soit $n = 2$ ou $n = 3$. L'ensemble des fonctions vectorielles continues $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, noté $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Remarque.

Il n'est pas rare de voir des fonctions vectorielles écrites sans la flèche. Il n'y a aucun mal à cela (bien au contraire, ça va plus vite à écrire). Si c'est le cas, il faut garder en tête que la fonction est vectorielle et possède donc plusieurs fonctions coordonnées.

1.2 Dérivabilité

1.2.1 Définitions

Définition.

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ avec $n = 2$ ou $n = 3$ une fonction vectorielle.
- Soit $a \in I$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est dérivable en a si les n fonctions coordonnées le sont. Dans ce cas, on définit le **vecteur dérivé** ou encore **vecteur tangent** de $\overrightarrow{f}$ en a par :
  - $\overrightarrow{f}'(a) = (x'(a), y'(a))$ si $n = 2$ et $f(t) = (x(t), y(t))$.
  - $\overrightarrow{f}'(a) = (x'(a), y'(a), z'(a))$ si $n = 3$ et $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
- On dit que $\overrightarrow{f}$ est dérivable sur I si les n fonctions coordonnées le sont.

> *Définition.*
>
> Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ avec $n = 2, 3$ une fonction vectorielle et soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si ses fonctions coordonnées le sont. Si $\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (et $k \in \mathbb{N}$), on définit alors pour tout $t \in I$, :
> - $\overrightarrow{f}^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t))$ si $n = 2$ et $f(t) = (x(t), y(t))$.
> - $\overrightarrow{f}^{(k)}(t) = (x^{(k)}(t), y^{(k)}(t), z^{(k)}(t))$ si $n = 3$ et $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.
>
> L'ensemble des fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est noté $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$.

Proposition — Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $n = 2$ ou 3.
$\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$.

Remarque.

- On peut définir la notion de vecteur dérivé à gauche et à droite en a à l'aide des fonctions coordonnées.
- Si $\overrightarrow{f}(t)$ représente la position d'une particule en mouvement, le vecteur dérivé représente la **vitesse instantanée** de la particule. Le vecteur dérivé seconde $\overrightarrow{f}''(t_0)$ représente l'**accélération** de la particule.

1.2.2 Formules

On fixe (encore) un intervalle I. On va utiliser les formules de dérivation valables pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour démontrer des formules valables pour les fonctions vectorielles. On considère $n = 2$ ou 3 : les formules seront donc valables dans les deux cas $n = 2$ et $n = 3$.

Les démonstrations sont à écrire dans vos notes de cours.

> I - Dérivation d'une somme $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$
>
> Soit $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction somme $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
> $$(\overrightarrow{f} + \overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f}' + \overrightarrow{g}'$$

> II - Dérivation de $\varphi \cdot \overrightarrow{f}$
>
> Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $\varphi \cdot \overrightarrow{f} : t \in I \mapsto \varphi(t)\overrightarrow{f}(t) \in \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
> $$(\varphi \cdot \overrightarrow{f})' = \varphi' \cdot \overrightarrow{f} + \varphi \cdot \overrightarrow{f}'$$

> III - Dérivation d'un produit scalaire $\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \rangle$
>
> Soit $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \rangle : t \in I \mapsto \langle \overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t) \rangle \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
> $$\langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} \rangle' = \langle \overrightarrow{f}', \overrightarrow{g} \rangle + \langle \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}' \rangle$$

> IV - Dérivation d'un produit vectoriel $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}$
>
> Soit $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g} : t \in I \mapsto \overrightarrow{f}(t) \wedge \overrightarrow{g}(t) \in \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et
> $$\left(\overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}\right)' = \overrightarrow{f}' \wedge \overrightarrow{g} + \overrightarrow{f} \wedge \overrightarrow{g}'$$

Astuce

Pour retenir les trois formules précédentes, on doit chercher à écrire la *"seule formule de Leibniz qui ait du sens"*.

> V - Dérivation d'une norme $||\overrightarrow{f}||$
>
> Soit $\overrightarrow{f} : \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que pour tout$t \in I$, $\overrightarrow{f}(t) \neq 0$. Alors, $||\overrightarrow{f}|| : t \in I \mapsto ||\overrightarrow{f}(t)|| \in \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ et
> $$||\overrightarrow{f}||' = \frac{\langle \overrightarrow{f}', \overrightarrow{f} \rangle}{||\overrightarrow{f}||}$$

Exemple. En première approximation, on peut supposer que le mouvement de la Terre autour du soleil s'effectue sur un cercle. En fixant l'origine au soleil et en notant $M(t)$ la position de la Terre à l'instant t, on introduit la fonction vectorielle $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$. Montrer qu'à tout instant t, le vecteur vitesse de la Terre est orthogonal à $\overrightarrow{OM(t)}$.

VI - Dérivation d'un déterminant

- Cas $n = 2$. Soit $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g} : I \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}) : t \in I \mapsto \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t)) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left[\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})\right]' = \det(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}) + \det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}')$$

- Cas $n = 3$. Soit $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h} : I \to \mathbb{R}^3$ de classe $\mathcal{C}^1$. La fonction $\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}) : t \in I \mapsto \det(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t), \overrightarrow{h}(t)) \in \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\left[\det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h})\right]' = \det(\overrightarrow{f}', \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}) + \det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}', \overrightarrow{h}) + \det(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g}, \overrightarrow{h}')$$

1.3 Développement limité

On note toujours I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $n = 2, 3$.

Définition.

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Soit $t_0 \in I$. On dit que $\overrightarrow{f}$ est négligeable devant φ au voisinage de t_0, ce que l'on note $\overrightarrow{f}(t) \underset{t \to t_0}{=} o(\varphi(t))$, si les n fonctions coordonnées de $\overrightarrow{f}$ sont négligeables devant φ au voisinage de t_0.

Le cas particulier $\varphi(t) = (t - t_0)^p$ est à bien garder en tête, notamment quand $t_0 = 0$.

Définition.

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $t_0 \in I$ et $p \in \mathbb{N}$. On dit que $\overrightarrow{f}$ possède un **développement limité d'ordre** p au voisinage de t_0 s'il existe $(\overrightarrow{b_0}, \dots, \overrightarrow{b_p}) \in (\mathbb{R}^n)^p$ tels que, au voisinage de t_0,

$$f(t) = \overrightarrow{b_0} + \overrightarrow{b_1}(t - t_0) + \cdots + \overrightarrow{b_p}(t - t_0)^p + o((t - t_0)^p)$$

$\overrightarrow{b_0} + \overrightarrow{b_1}(t - t_0) + \cdots + \overrightarrow{b_p}(t - t_0)^p$ est appelée la partie régulière du développement limité d'ordre p de $\overrightarrow{f}$.

Développements limités

Soit $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle, $t_0 \in I$ et $p \in \mathbb{N}$.

(i) On suppose que les n fonctions coordonnées de $\overrightarrow{f}$ possèdent un développement limité d'ordre p au voisinage de t_0. Alors, $\overrightarrow{f}$ possède un développement limité d'ordre p au voisinage de t_0.

(ii) La réciproque est vraie.

(iii) Si $i = 1, 2$ ou 3, la partie régulière du développement limité de la i-ième coordonnée de $\overrightarrow{f}$ est la i-ième coordonnée de la partie régulière du développement limité de $\overrightarrow{f}$.

Savoir-faire.

Le théorème précédent nous dit simplement que pour calculer le développement limité d'une fonction vectorielle, il faut et il suffit de calculer le développement limité de chacune de ses coordonnées.

Astuce

Pour faciliter la lecture, rien n'empêche d'écrire les fonctions vectorielles en colonne.

Exemple. On considère la fonction $\overrightarrow{f} : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Calculer le développement limité de $\overrightarrow{f}$ d'ordre 3 en 0.

1. On calcule le $DL_3(0)$ de la première coordonnée

$$\cos(3t) = \qquad\qquad\qquad + o(t^3)$$

2. On calcule le $DL_3(0)$ de la première coordonnée

$$\sin(2t) = \qquad\qquad\qquad + o(t^3)$$

3. On en déduit le développement limité d'ordre 3 de $\overrightarrow{f}$ en 0

$$\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} t^3 + o(t^3)$$

Formule de Taylor-Young

Soit $t_0 \in I$, $p \in \mathbb{N}$. On considère $n = 2$ ou $n = 3$. Soit $\overrightarrow{f} \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$. $\overrightarrow{f}$ possède un développement limité à l'ordre p au voisinage de t_0, donné par la **formule de Taylor-Young** :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(t) &= \overrightarrow{f}(t_0) + \overrightarrow{f}'(t_0)(t - t_0) + \cdots + \frac{\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)}{p!}(t - t_0)^p + o((t - t_0)^p)) \\ &= \sum_{k=0}^{p} \frac{\overrightarrow{f}^{(k)}(t_0)}{k!}(t - t_0)^k + o((t - t_0)^p)) \end{aligned}$$

Astuce

Pour calculer les vecteurs dérivés d'une fonction vectorielle, il sera parfois plus rapide d'écrire le développement limité et d'identifier les coefficients avec ceux de la formule de Taylor-Young.

2 Courbes paramétrées

Dans toute la suite, on munit le plan $\mathbb{R}^2$ (resp. l'espace $\mathbb{R}^3$) d'une repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (resp. $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$).

2.1 Définitions et premiers exemples

2.1.1 Définitions

Pour représenter une fonction à valeurs réelles $f : I \to \mathbb{R}$, on trace le **graphe** de f, à savoir l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ pour $x \in I$. Le paramètre x apparaît sur l'axe des abscisses.
Dans le cas des fonctions vectorielles, le mode de représentation est différent. Si $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$, on trace l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $\overrightarrow{f(t)}$. Le paramètre t n'apparaît pas directement sur le tracé. C'est ce qu'on fait lorsqu'on veut visualiser la trajectoire d'une particule au cours du temps.

Définition.

Une **courbe paramétrée** Γ (parfois appelée arc paramétré) du plan $\mathbb{R}^2$ ou de l'espace $\mathbb{R}^3$ est la donnée d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ et d'une fonction vectorielle $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$, et l'on peut noter $\Gamma = (I, \overrightarrow{f})$.
La fonction $\overrightarrow{f}$ s'appelle un **paramétrage** de la courbe. t est le **paramètre** de la courbe. Pour $t \in I$, on définit le point de paramètre t, souvent noté $M(t)$, en posant $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{OM(t)}$. On appelle aussi $M(t)$ le **point courant** de la courbe Γ.
Les fonctions coordonnées de $\overrightarrow{f}$ sont appelées une **représentation paramétrique** (en coordonnées cartésiennes) **de la courbe** Γ.
Représenter la courbe paramétrée Γ, c'est tracer l'ensemble des points courants $M(t)$ pour $t \in I$.

Remarque.

- Si x, y et éventuellement z désignent les fonctions coordonnées de $\overrightarrow{f}$, les coordonnées de $M(t)$ sont donc $(x(t), y(t))$ (ou $(x(t), y(t), z(t))$).
- Une même courbe paramétrée peut avoir plusieurs représentations paramétriques.

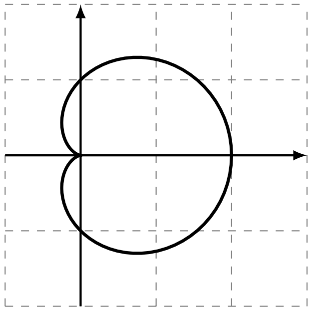
- On vous demandera surtout de représenter des courbes sur votre feuille ... donc dans le plan $\mathbb{R}^2$.
- Par soucis de clarté, on écrit souvent la représentation paramétrique sous la forme

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$$

Exemple. Une bien jolie courbe : la **cardioïde**. Une représentation paramétrique de cette courbe est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)(1+\cos(t)) \\ y(t) = \sin(t)(1+\cos(t)) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Placer sur le dessin les points courant $M(0), M(\pi)$ et $M(\pi/2)$.



Nous garderons cet exemple tout au long du chapitre pour comprendre comment obtenir le dessin à partir des fonctions coordonnées.

2.1.2 Deux exemples importants : les droites et les cercles

Droites du plan. Soit $(\mathcal{D})$ la droite de $\mathbb{R}^2$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (a, b)$ et passant par le point A de coordonnée (x_A, y_A). Une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{f} = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ où

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$$

Avec cette représentation, le point courant $M(0)$ est le point ......

Droites de l'espace. Soit $(\mathcal{D})$ la droite de $\mathbb{R}^3$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ et passant par le point A de coordonnée (x_A, y_A, z_A). Une représentation paramétrique de $(\mathcal{D})$ est donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{f} = (x, y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ où

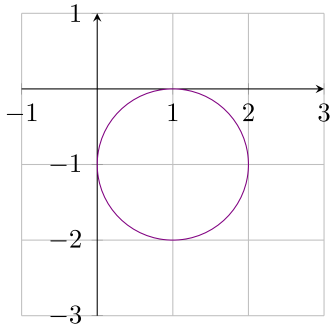
$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \\ z(t) = \end{cases}$$

Avec cette représentation, le point courant $M(0)$ est le point ......

Cercles du plan. Soit $\Omega = (x_0, y_0)$ un point du plan et $r > 0$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω et de rayon r. Une représentation paramétrique de $(\mathcal{C})$ est donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{f} = (x, y) : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$ où

$$\begin{cases} x(t) = \\ y(t) = \end{cases}$$

Avec cette représentation, pour $\Omega = (1, -1)$ et $r = 1$, placer sur le dessin ci-dessous les points $M(0), M(\pi/2)$, $M(\pi)$, $M(3\pi/2)$ et $M(7\pi/4)$.



Remarque.

Si l'on étend la fonction $\overrightarrow{f}$ sur $[0, 4\pi[$ (par exemple), la courbe paramétrée parcourt deux fois le cercle : ce n'est donc pas la même courbe paramétrée. En revanche, si l'on prend la même définition de $\overrightarrow{f}$ mais sur $]-\pi, \pi]$, il s'agit d'une autre paramétrisation de la même courbe.

2.1.3 Le cas des graphes de fonctions

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Tracer le graphe de f, c'est tracer l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in I$. On peut donc dire que le graphe de f est la courbe paramétrée Γ :

$$\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = f(t) \end{cases}, t \in I$$

Rappel. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $x_0 \in I$. Le graphe de f possède une tangente en $(x_0, f(x_0))$ dont l'équation est

$$y =$$

Le vecteur tangent au graphe de f en $(x_0, f(x_0))$ est le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$.

Remarque.

Avec la représentation paramétrique ci-dessus, il s'agit donc de dériver les deux fonctions coordonnées en x_0.

2.2 Tracé de courbe

Nous allons expliquer comment obtenir une esquisse du tracé de la courbe à partir des fonctions coordonnées. Nous nous concentrons sur les courbes planes.

2.2.1 Réduction du domaine

- **Périodicité.** Si les deux fonctions coordonnées x et y sont simultanément T-périodique, il suffit d'étudier la courbe sur tout intervalle de taille T. On préfèrera en général $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. On obtient alors directement toute la courbe puisque le même motif se répète.

- **Symétries.** On choisit un des changements de variable de la Table 1 ci-dessous : $\varphi(t)$. On le "teste" sur la courbe en regardant $\overrightarrow{f}(\varphi(t))$. Si l'on observe l'une des relations remarquables de la Table 2 ci-dessous, on restreint l'intervalle d'étude comme indiqué dans la Table 1 et l'on déduira la partie manquante de la courbe en appliquant la transformation géométrique indiquée dans la Table 2 à la partie de la courbe tracée à partir de l'intervalle réduit.

Intervalle d'origine	Changement de variable	Intervalle réduit
$[-a, a]$ ou $\mathbb{R}$	$\varphi(t) = -t$	$[0, a]$ ou $[0, +\infty[$
$[0, a]$	$\varphi(t) = a - t$	$[0, \frac{a}{2}]$
$]0, +\infty[$	$\varphi(t) = \frac{1}{t}$	$]0, 1[$

TABLE 1 – Liste des changements de variable

Remarque.

Le changement de variable à tester en priorité est $t \mapsto -t$. Il faut penser au changement de variable $t \mapsto \pi - t$ lorsque des fonctions trigonométriques sont en jeu. Le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{t}$ est moins crucial et peut être oublié (en première lecture ?), sauf pour les plus à l'aise.

☞ **Retour à la cardioïde. (1/6)** [1]

- **Périodicité.** Les fonctions coordonnées sont clairement 2π-périodiques. Il suffit donc de tracer la courbe sur un intervalle de taille 2π, par exemple $[-\pi, \pi]$ ou $[0, 2\pi]$.
- **Symétries.** En utilisant les propriétés de **parité**, on vérifie que :
  - $x(-t) =$
  - $y(-t) =$
- **Conclusion**. Si l'on veut utiliser des propriétés de parité, on se restreint par périodicité à $[-\pi, \pi]$. On peut alors se restreindre à $[0, \pi]$. La partie de la courbe sur $[-\pi, 0]$ est alors obtenue comme la symétrique de la partie de la courbe sur $[0, \pi]$ par rapport à ....

1.
$$\begin{cases} x(t) = \cos(t)(1 + \cos(t)) \\ y(t) = \sin(t)(1 + \cos(t)) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

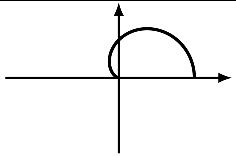
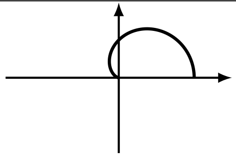
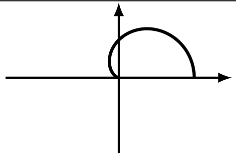
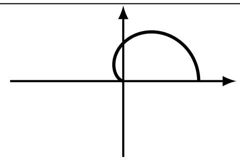
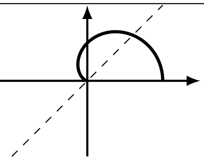
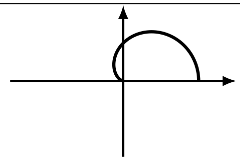
Relation remarquable	Transformation géométrique	Exemple
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$	Les courbes se superposent : c'est la même !	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à l'axe des ordonnées	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à l'axe des abscisses	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$	Symétrie centrale par rapport à l'origine	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$	Symétrie par rapport à la première bissectrice	
$\begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) + a \\ y(\varphi(t)) = y(t) + b \end{cases}$	Translation de vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	

Table 2 – Liste des symétries

2.2.2 Méthode des tableaux de signes

Savoir-faire.

On cherche à tracer une courbe paramétrée plane $\overrightarrow{f}(t) = (x(t), y(t))$ pour $t \in I$.

1. On commence par restreindre le domaine d'étude.
2. On dit que la courbe est $\mathcal{C}^1$ et on dresse simultanément les tableaux de signes de x' et y' sur ce domaine restreint. **On fait bien apparaître tous les points d'annulation de x' et y'.**
3. On place chacun des points courants $M(t_0)$ dont le paramètre t_0 est soit une extrémité du domaine d'étude restreint, soit un point d'annulation de x' ou y'.
4. On relie ces points, pour le moment grossièrement, en respectant le sens de parcours qui dépend des signes de x' et y', selon le tableau suivant :

	$x' \geq 0$	$x' \leq 0$
$y' \geq 0$	$\nearrow$	$\searrow$
$y' \leq 0$	$\nwarrow$	$\swarrow$

Cela nous donne une esquisse de la courbe sur le domaine restreint.
5. On utilise les symétries de la courbe pour tracer toute la courbe.

Cette étude sera poursuivie dans les sous-sections suivantes, en évoquant les points remarquables des courbes.

☞ **Retour à la cardioïde. (2/6)**

1. On a vu que l'on pouvait se restreindre à $[0, \pi]$.
2. On dresse les tableaux de signes de x' et y' sur $[0, \pi]$.

✍ **Travail à faire sur votre cahier.**

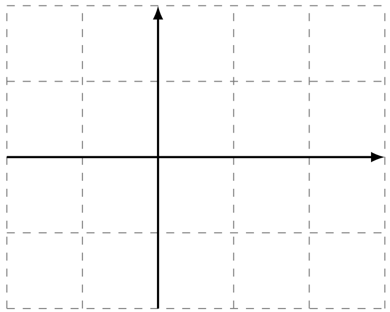
On doit trouver

$$x'(t) = -\sin(t)(1 + 2\cos(t))$$

$$y'(t) = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos\left(\frac{3t}{2}\right)$$

t	0	π
$x'(t)$		
$y'(t)$		

3. On place les points $M(0)$, $M(....)$, $M(.....)$ et $M(\pi)$.
4. On les relie avec le bon sens de parcours.
5. On trace alors la symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



2.3 Points remarquables, tangentes et position relative.

2.3.1 Définitions

Définition.

Soit $\Gamma = (\overrightarrow{f}, I)$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

- On dit que le point courant $M(t_0)$ est **régulier** si $\overrightarrow{f}'(t_0) \neq 0$. Si tous les points de la courbe sont réguliers, on dit que la courbe est **régulière**.
- On dit que le point courant $M(t_0)$ est **singulier** ou **stationnaire** si $\overrightarrow{f}'(t_0) = 0$.

Remarque.

- Si la courbe paramétrée Γ représente le mouvement d'une particule au cours du temps, on rappelle que le vecteur dérivé $\overrightarrow{f}'(t)$ représente la vitesse instantanée. Un point singulier est donc un point où la vitesse de la particule s'annule. Penser par exemple au mouvement d'un pendule pesant.
- Déterminer les points singuliers d'une courbe paramétrée $(\overrightarrow{f}, I)$, c'est chercher tous les paramètres $t \in I$ tels que $\overrightarrow{f}'(t) = 0$. On écrit en général un système à 2 (ou 3 si on travaille dans l'espace) équations

$$\begin{cases} x'(t) = 0 \\ y'(t) = 0 \\ (z'(t) = 0) \end{cases}$$

☞ **Retour à la cardioïde (3/6).** Puisque la courbe est 2π-périodique, il suffit de chercher les paramètres des points singuliers dans $[0, 2\pi]$. En reprenant l'expression du vecteur dérivé plus haut, on a

✍ **Travail à faire sur votre cahier.**

On en déduit que la courbe possède 1 point singulier : il s'agit de $M(\pi) = (0, 0)$.
Commentaire : Ce point a effectivement l'air singulier, au sens littéral du terme !

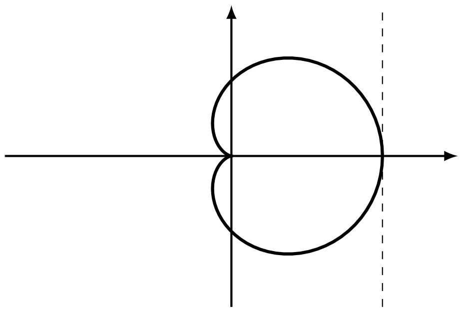
Définition.

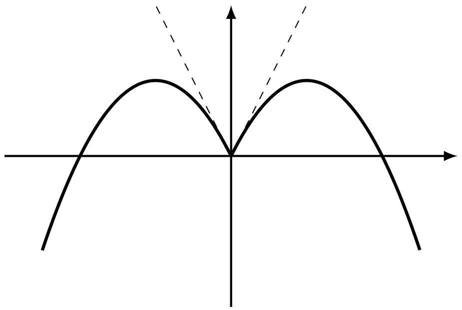
Soit $\Gamma = (\overrightarrow{f}, I)$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$.

- On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ est une sécante à la courbe passant par $M(t_0)$ s'il existe $t \neq t_0$ tel que $\mathcal{D} = (M(t)M(t_0))$.
- On définit, si elle existe, la **tangente à la courbe** Γ en $M(t_0)$ comme la limite des sécantes à la courbe passant par $M(t_0)$.

Remarque.

Pour une courbe quelconque, la tangente n'existe pas à tous les coups. Parfois, la limite des sécantes peut-être différente à gauche et à droite, dans ce cas, on parle alors de tangentes à gauche ou à droite.





Tangente en un point régulier

Soit $\Gamma = (\overrightarrow{f}, I)$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. On suppose que le point $M(t_0)$ est régulier. Alors, la tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{f}'(t_0)$.

Démonstration. On travaille dans $\mathbb{R}^2$. Soit $t \in I$, différent de t_0. Un vecteur directeur de la sécante $(M(t)M(t_0))$ est $\overrightarrow{M(t_0)M(t)}$, mais comme $t - t_0 \neq 0$, on peut également prendre

$$\frac{1}{t-t_0}\overrightarrow{M(t_0)M(t)} = \left(\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}, \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}\right)$$

Quant $t \to t_0$, ce vecteur directeur tend vers $(x'(t_0), y'(t_0)) = \overrightarrow{f}'(t_0)$. La tangente a la courbe en t_0 a donc pour vecteur directeur $\overrightarrow{f}'(t_0) \neq 0$. Toutes les sécantes passant par $M(t_0)$, il en va de même pour la limite, à savoir la tangente, qui est donc la droite passant par $M(t_0)$ dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$.

Tangente en un point où au moins un vecteur dérivé est non nul

Soit $\Gamma = (\overrightarrow{f}, I)$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que p est le premier entier naturel non nul tel que $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq 0$: à savoir

$$\overrightarrow{f}'(t_0) = 0, \overrightarrow{f}^{(2)}(t_0) = 0, \ldots, \overrightarrow{f}^{(p-1)}(t_0) = 0, \overrightarrow{f}^{(p)}(t_0) \neq 0$$

Alors, la tangente à Γ en $M(t_0)$ est la droite passant par $M(t_0)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)$.

Remarque.

- Ce théorème est admis.
- Ce théorème permet de retrouver le cas d'un point régulier puisque dans ce cas $p = 1$.

Savoir-faire.

Déterminer l'équation de la tangente en un point.

- A moins qu'il soit facile de calculer les dérivées successives des fonctions coordonnées, il est plus judicieux d'**écrire le développement limité** des fonctions coordonnées pour faire apparaître un premier terme non nul (après le terme constant) :

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0) + \frac{1}{p!}\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)(t-t_0)^p + o((t-t_0)^p)$$

- On connaît alors un vecteur directeur $\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0)$ et un point de la droite $\overrightarrow{f}(t_0)$: on peut alors facilement obtenir, soit un système d'équations paramétriques de la droite, soit une équation cartésienne.

☞ **Retour à la cardioïde (4/6).** Déterminer la tangente à la courbe de la cardioïde en $M(0) = (0, 2)$ et $M(\pi) = (0, 0)$.

✍ **Travail à faire sur votre cahier.**

Définition.

Tangentes remarquables.

- Une tangente est **horizontale** si son vecteur directeur a pour coordonnées $(\alpha, 0)$ avec $\alpha \neq 0$. Dans le cas d'un point régulier $M(t_0)$, cela signifie que $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$.
- Une tangente est **verticale** si son vecteur directeur a pour coordonnées $(0, \alpha)$ avec $\alpha \neq 0$. Dans le cas d'un point régulier $M(t_0)$, cela signifie que $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$.

☞ **Retour à la cardioïde (5/6).** Déterminer toutes les tangentes horizontales et verticales de la cardioïde. Il suffit d'exploiter les formules des dérivées de x et y déjà données.

✍ **Travail à faire sur votre cahier.**

2.3.2 Position relative par rapport à la tangente

Pour déterminer la position relative de la courbe par rapport à sa tangente en $M(t_0)$, il faut commencer par écrire le développement limité de $\overrightarrow{f}$ au voisinage t_0. On doit écrire

$$\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f}(t_0) + \overrightarrow{u}_p(t-t_0)^p + \cdots + \overrightarrow{u}_q(t-t_0)^q + o(((t-t_0)^q)$$

où

- $\overrightarrow{u}_p(t-t_0)^p$ est le premier terme non nul (il donne donc le vecteur directeur de la tangente)
- q est le premier entier strictement supérieur à q tel que $(\overrightarrow{u}_p, \overrightarrow{u}_q)$ est **libre**.

On utilise ensuite la Table 3 ci-dessous pour conclure.

Remarque.

- Un point régulier est soit un point ordinaire, soit un point d'inflexion.
- Pour un point singulier, les 4 options sont possibles.
- Il faut (quasi) systématiquement faire cette étude pour les points singuliers, afin d'affiner le tracé de la courbe.

☞ **Retour à la cardioïde (6/6).** Étude en $M(\pi)$. On écrit le développement limité en π. Pour cela, il faut se rappeler qu'on se ramène toujours en 0 en posant $h = t - \pi \iff t = h + \pi$:

✍ **Travail à faire sur votre cahier.**

On obtient

$$\overrightarrow{f}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}(t-\pi)^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}(t-\pi)^3 + o((t-\pi)^3)$$

On est donc dans le cas $p = ...$ et $q = ...$ car la famille $\left(\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}\right)$ est libre.

Il s'agit donc d'un .

Type de point	p	q	Cas typique	Représentation
Point ordinaire	Impair	Pair	$p = 1$ $q = 2$	
Point d'inflexion	Impair	Impair	$p = 1$ $q = 3$	
Point de rebroussement de première espèce	Pair	Impair	$p = 2$ $q = 3$	
Point de rebroussement de deuxième espère	Pair	Pair	$p = 2$ $q = 4$	

TABLE 3 – Les différentes positions relatives par rapport à la tangente

3 Longueur d'une arc paramétrée.

Définition.

Soit $\Gamma = (\overrightarrow{f}, I)$ une courbe paramétrée. On suppose que $\overrightarrow{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $t_1 < t_2 \in I$. **La longueur de l'arc paramétré** Γ entre $M(t_1)$ et $M(t_2)$ est définie par

$$L = \int_{t_1}^{t_2} ||\overrightarrow{f}'(t)||dt$$

Si de plus, l'intégrale (potentiellement impropre) $\int_I ||\overrightarrow{f}'(t)||dt$ converge, la valeur de cette intégrale permet de définir **la longueur de la courbe** Γ.

Rappels : si l'on est dans le plan $\mathbb{R}^2$,

$$\boxed{||\overrightarrow{f}'(t)|| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}$$

et dans l'espace $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{||\overrightarrow{f}'(t)|| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}}$$

Exemple. Retrouvons la circonférence du cercle ! On considère $R > 0$ et le cercle de centre O et de rayon R, paramétré par

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

$x'(t) = -R\sin(t)$ et $y'(t) = R\cos(t)$, on a donc

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2\sin^2(t) + R^2\cos^2(t)}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(\sin^2(t) + \cos^2(t))}dt \\ &= \int_0^{2\pi} Rdt \\ &= 2\pi R \end{aligned}$$

4 Une étude complète

Savoir-faire.

Voici un plan d'action pour tracer une courbe paramétrée.

1. On réduit le domaine d'étude à l'aide de la périodicité et des symétries (éventuelles) de la courbe.
2. On dresse les tableaux de signes des dérivées des fonctions coordonnées pour avoir une première ébauche de la courbe.
3. On se sert de ces calculs pour identifier les points à tangente horizontale et verticale. On les place sur le dessin.
4. On se sert (encore) de ces calculs pour identifier les points singuliers. On les place sur le dessin. Si demandé ou si besoin, on étudie la position relative de ces points singuliers.
5. On trace la courbe, d'abord sur le domaine réduit, puis grâce aux symétries, sur le domaine complet. Pour cela, on relie les points déjà placé selon le sens indiqué par les tableaux de signes et on se sert des étapes 3 et 4 pour affiner le tracé au voisinage des points remarquables.

Exemple. Traitons ensemble les deux exemples suivants, en utilisant le plan d'action ci-dessus.

1. Tracer la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(3t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
2. Tracer la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
   On étudiera la nature du point $M(0)$ et la position relative de la tangente en ce point. Cette courbe est appelée cycloïde.