P3 - Variables aléatoires discrètes

Loi, espérance, variance

1 **-** Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On effectue n tirages successifs avec remise, et on note sous forme de n-uplet le résultat de ces n tirages. On note Ω l'univers de cette expérience, X_i la variable aléatoire égale au numéro du jeton obtenu au i-ème tirage ($i \in \{1, ..., n\}$) et Y la variable aléatoire égale au plus grand numéro obtenu.

1. Quelle est la valeur de $|\Omega|$?
2. Soit $i \in \{1, ..., n\}$. Calculer $P(X_i = k)$ pour $k \in X_i(\Omega)$ puis $\mathbb{P}(X_i \leq k)$.
3. Que vaut $Y(\Omega)$?
4. Pour tout $k \in Y(\Omega)$, exprimer l'évènement $(Y \leq k)$ à l'aide des variables aléatoires X_i puis en déduire la valeur de $P(Y \leq k)$.
5. En déduire la loi de Y.

2 **-** Une piste rectiligne est divisée en cases, numérotées 0, 1, 2, ... de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite, de 1 ou 2 cases au hasard, de façon équiprobable, à chaque saut. Au départ elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de probabilité de X_1, et calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts. Déterminer la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n, puis $E(X_n)$ et $V(X_n)$.

3 **-** On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Vérifier que l'on peut définir une loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\mathbb{P}_X(\{n\}) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X qui suit la loi ci-dessus : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p_n$.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Et un moment d'ordre 2 ?
3. La variable aléatoire $\sqrt{X}$ admet-elle une espérance ?

4 **-**On note $\alpha = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \frac{1}{\alpha n^3}$.

1. Vérifier que l'on peut définir une loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{N}^*$ vérifiant $\mathbb{P}_X(\{n\}) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Dans la suite, on considère une variable aléatoire X qui suit la loi ci-dessus : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p_n$.

2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
3. Admet-elle un moment d'ordre 2 ?
4. La variable aléatoire $X^{3/2}$ admet-elle une espérance ?

Lois usuelles

5 **-** *Fonction génératrice.* Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice de X comme l'application

$$\mathcal{G}_X : t \in [-1, 1] \mapsto \mathbb{E}(t^X)$$

1. En utilisant la formule de transfert, montrer que $\mathcal{G}_X(t)$ est bien définie pour $t \in [-1, 1]$ et vaut

$$\mathcal{G}_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k t^k$$

2. Montrer que $\mathcal{G}_X(t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer p_n à partir de la dérivée n-ième de $\mathcal{G}_X$ en 0.
3. Calculer $\mathcal{G}_X$ dans chacun des cas suivants :

a) X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

b) X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$.

c) X suit la loi géométrique de paramètre p avec $p \in]0, 1[$.

6 **-***Perte de mémoire de la loi géométrique.* Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X > k)$.
2. Soit $k, l \in N$. Calculer $\mathbb{P}_{X>k}(X = k + l)$.
3. En déduire la loi conditionnelle de $X - k$ sachant $X > k$.

---

7 - *Calcul avec la loi de Poisson.* Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Calculer la probabilité que la valeur de X soit paire.
2. On note $Y = \frac{1}{1+X}$. Déterminer l'espérance de Y.

---

8 - Soit $\lambda > 0$ et $p \in]0, 1[$. Dans le port d'Amsterdam, on estime que le nombre de bateaux qui accostent au cours d'une année suit une loi de Poisson de paramètre λ. En outre, lorsqu'un bateau arrive, il n'est pas rare d'y voir les marins chanter : cet événement a lieu sur un bateau avec probabilité p. On note X le nombre de bateaux accostant en 2025 et Y le nombre de bateaux sur lesquels les marins chantent.

1. Soit $k, j \in \mathbb{N}$. Donner, en justifiant votre réponse, $\mathbb{P}_{(X=k)}(Y = j)$. *On pourra distinguer les cas $k \leq j$ et $k > j$.*
2. En déduire la loi de Y.

---

9 ★ - Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Déterminer la loi de $X + Y$.

---

10 ★ - On lance n fois une pièce équilibrée.
Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces ?

---

11 - *Utilisation classique de Bienaimé-Tchebychev.* Une usine confectionne des pièces dont une proportion p est défectueuse. La valeur de p est inconnue mais on souhaiterait en connaitre une estimation. Pour cela on prélève n pièces et on note Z_n le nombre de pièces défectueuses dans ce prélèvement. On considère que le nombre total de pièces dans l'usine est assez grand pour que le prélèvement des n pièces soit considéré comme une suite de n tirages avec remise. L'idée est d'approcher la valeur de p par la valeur de Z_n/n. On va donc chercher à partir de quelle valeur de n cette approximation sera bonne.

1. Quelle est la loi de Z_n ?
2. En déduire l'espérance et la variance de Z_n.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$.
4. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, on a $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}$.
5. En déduire une condition sur n pour que Z_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Exercices théoriques

---

12 ★ - *Une formule utile.* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}(X > k)$$

---

13 ★ - Soit X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes possédant un moment d'ordre 2.

1. Montrer que XY est d'espérance finie. *On pourra utiliser que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leq \frac{a^2+b^2}{2}$.*
2. Montrer et que l'on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq V(X)V(Y)$$

On pourra considérer la variable aléatoire $Z_t = (X + tY)^2$ pour $t \in \mathbb{R}$.