DM 10 :

I -

Q1. $\cos(2t) = 2\cos^2(t) - 1$.

Q2. Son discriminant vaut

$$\Delta = 1 + 8 = 9.$$

Donc ses racines sont

$$\frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{cases} -1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ainsi, $\boxed{P(X) = 2(X+1)\left(X - \frac{1}{2}\right)}$.

Q3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

donc

$e^{3it} = (\cos(t) + i(\sin(t)))^3 =$

$$\cos^3(t) + 3i\cos^2(t)\sin(t)$$
$$- 3\cos(t)\sin^2(t) - i\sin^3(t).$$

Q4. Finalement,

$$\sin(3t) = \mathrm{Im}(e^{3it}) = 3\cos^2\sin(t) - \sin^3(t)$$
$$= \sin(t)\left(3\cos^2 - \sin^2(t)\right)$$
$$= \sin(t)\left(3(1-\sin^2(t)) - \sin^2(t)\right)$$
$$\boxed{= \sin(t)\left(3 - 4\sin^2(t)\right)}.$$

Q5.

$$x(t+2\pi) = \sin(t+2\pi) + \frac{1}{2}\sin(2t+4\pi)$$
$$= \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) = x(t).$$

$$y(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) + \frac{1}{3}\cos(3t+6\pi)$$
$$= \cos(t) + \frac{1}{3}\cos(t) = y(t).$$

x et y sont 2π-périodiques, on peut restreindre l'étude sur $[-\pi, \pi]$ (ou $[0, 2\pi]$).

Q6. sin étant impair et cos pair, on trouve que

$$\boxed{\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t). \end{cases}}$$

La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

Q7.

$y'(t) = -\sin(t) - \sin(3t)$

$$= -\sin(t) - \sin(t)\left(3 - 2\sin^2(t)\right)$$

$$= -\sin(t)\left(4 - 4\sin^2(t)\right)$$

$$\underline{= 4\sin(t)\left(\sin^2(t) - 1\right)}$$

Q8. On sait que

$\forall t \in [0, \pi]$, $\sin(t) \geq 0$ avec égalité en 0 et π.

et $\forall t \in [0, \pi]$, $|\sin(t)| \leq 1$ donc

$\sin^2(t) - 1 \leq 0$, avec égalité en $\frac{\pi}{2}$

d'où

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$y'(t)$	0	$-$	0	$-$	0

Q9. $x'(t) = \cos(t) + \cos(2t)$

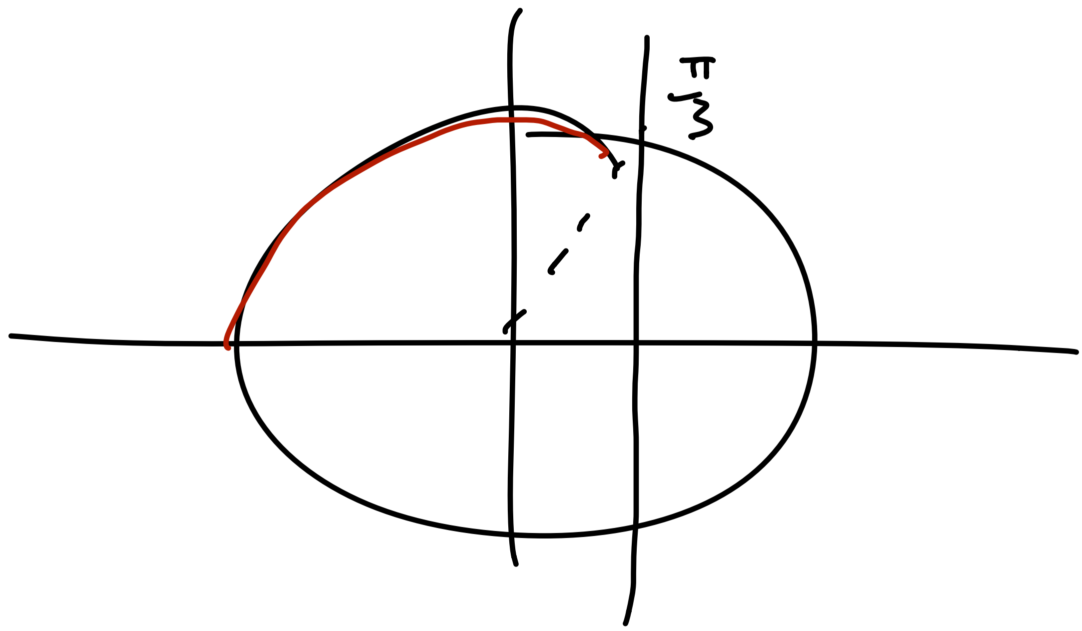
$= \cos(t) + 2\cos^2(t) - 1$

$= P(\cos(t))$

$= 2(\cos(t)+1)\left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right).$

Q10. $\cos(t) = \frac{1}{2} \iff t = \frac{\pi}{3}$

(pour $t \in [0, \pi]$).



On a, par lecture graphique :

$\{t \in [0,\pi],\ \cos(t) \leq \frac{1}{2}\} = \boxed{\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]}.$

Q11.

t	0		$\pi/3$		π
$\cos(t)+1$			$+$		0
$\cos(t)-\frac{1}{2}$		$+$	0	$-$	
$x'(t)$		$+$	0	$-$	0

Q12. En $\boxed{t=\frac{\pi}{3}}$, $\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \end{cases}$

Le point $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ est régulier et la tangente est verticale.

En $\boxed{t=0 \text{ et } t=\frac{\pi}{2}}$, le point $M(t)$ est régulier car $x'(t) \neq 0$ et la tangente est horizontale car $y'(t)=0$.

⚠ Le point $M(\pi)$ est singulier : On ne peut pas encore donner la tangente en ce point.

Q13

a) $h = t - \pi \iff t = h + \pi$ avec $h \to 0$

$$x(t) = x(h+\pi) = \sin(h+\pi) + \frac{1}{2}\sin(2h+2\pi)$$
$$= -\sin(h) + \frac{1}{2}\sin(2h)$$

$$= -\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) + \frac{1}{2}\left(2h - \frac{(2h)^3}{6} + o(h^3)\right)$$

$$= \frac{h^3}{6} - \frac{4h^3}{6} + o(h^3)$$

$$= -\frac{3h^3}{6} + o(h^3) = -\frac{1}{2}h^3 + o(h^3)$$

donc $\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}(t-\pi)^3 + o\left((t-\pi)^3\right)}$.

$\left(a = -\frac{1}{2}\right)$.

$$y(t) = y(h+\pi) = \cos(h+\pi) + \frac{1}{3}\cos(3h+3\pi)$$

$$= -\cos(h) - \frac{1}{3}\cos(3h)$$

$$= -\left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{(3h)^2}{2} + o(h^3)\right)$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{h^2}{2} + \frac{3h^2}{2} + o(h^3)$$

$$= -\frac{4}{3} + 2h^2 + o(h^3).$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{4}{3} + 2(t-\pi)^2 + o\left((t-\pi)^3\right)}$$

$$\boxed{b = 2}$$

b) On a donc, au voisinage de π :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} (t-\pi)^{\underbrace{2}_{p}}$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} (t-\pi)^{\underbrace{3}_{q}} + o\left((t-\pi)^3\right)$$

La tangente en $M(\pi)$ est donc dirigée par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$: elle est donc verticale.

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre donc par le cours, $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce ($p=2$, $q=3$).

Q14. On pose $h = t - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + h$

$$x(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right) + \frac{1}{2}\sin(2h+\pi)$$
$$= +\cos(h) - \frac{1}{2}\sin(2h)$$

$$= \left(1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)\right) - \frac{1}{2}\left(h + \frac{(2h)^3}{6} + o(h^3)\right)$$

$$= 1 - \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2} + \frac{4h^3}{6} + o(h^3).$$

$$y(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) + \frac{1}{3}\cos\left(3h + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= -\sin(h) + \frac{1}{3}\sin(3h)$$

$$= -\left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)\right) + \frac{1}{3}\left(3h - \frac{(3h)^3}{6} + o(h^3)\right)$$

$$= \frac{h^3}{6} - \frac{9h^3}{6} + o(h^3)$$

$$= -\frac{4}{3}h^3 + o(h^3).$$

Finalement, au voisinage de $\frac{\pi}{2}$,

$$\vec{OM}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$+ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$+ \begin{pmatrix} \frac{4}{6} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left(\left(t - \frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

Le vecteur directeur de la tangente est $\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Le premier terme non colinéaire à $\vec{u}$ dans le DL_3 est en $q = 3$.

Donc $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est un point d'inflexion.

Q15.

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$x'(t)$		$+$	0			$-$	0
$y'(t)$	0	$-$			0	$-$	0

On place

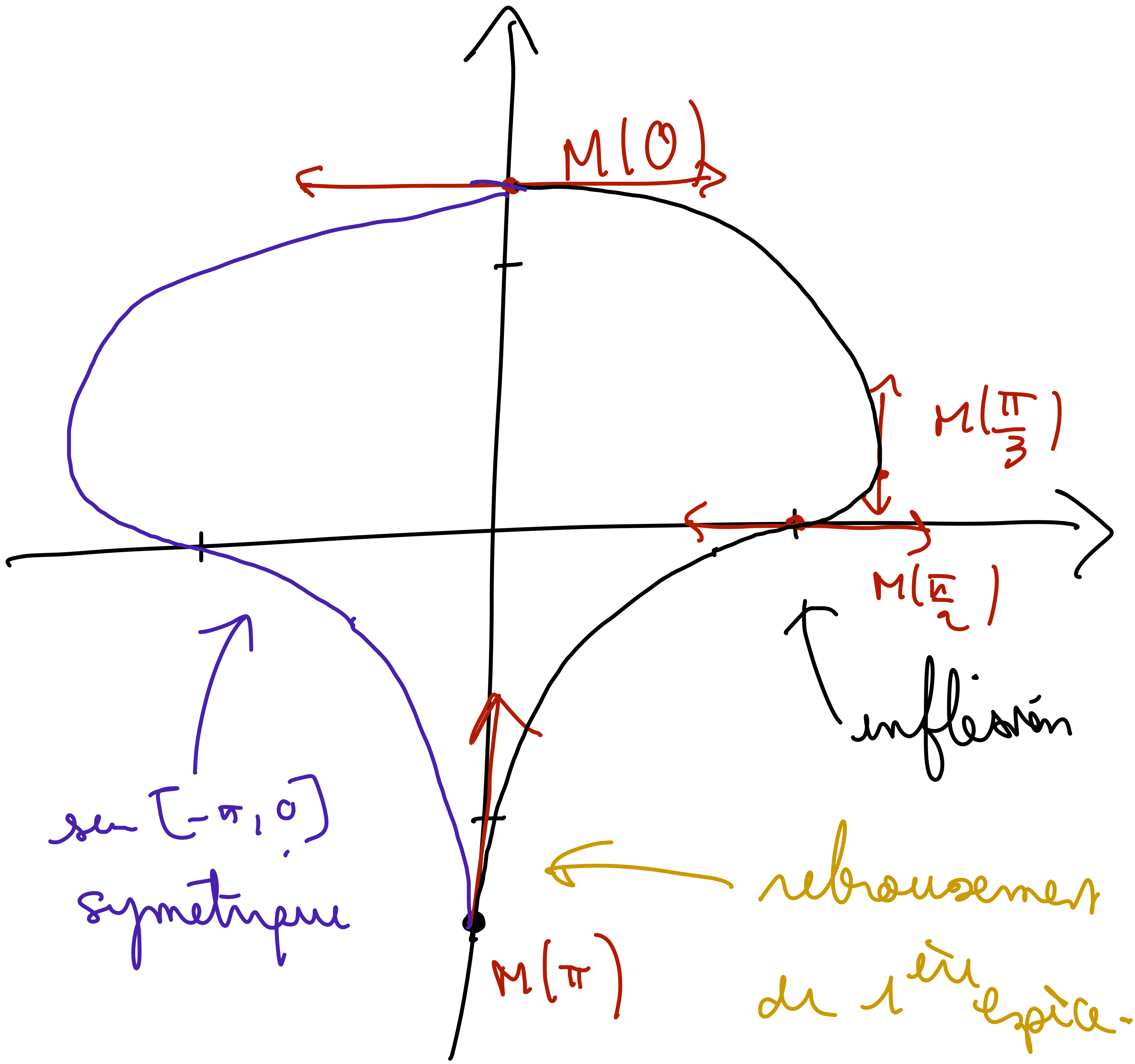
$$M(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$$M\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

avec leur tangentes.



$$\frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1{,}2$$