Programme de khôlle. Semaine 17

Description des thèmes

AL5 - Espaces préhilbertiens

Pas (encore) de projection orthogonale cette semaine

1) Produit scalaire et norme

   1. Définitions et premiers exemples
      - Définitions : produit scalaire, espace préhilbertien, espace euclidien
      - Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.
      - L'exemple canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathrm{tr}(A^T B)$
      - Un exemple sur $\mathbb{R}_n[X]$: $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$
      - Un exemple sur $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$
      - Un exemple sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$.
   2. Norme associée à un produit scalaire
      - Définition de la norme $||x|| = \langle x, x\rangle$ et de la distance $d(x, y) = ||x - y||$
      - Propriétés de la norme : homogénéité et $||x|| = 0 \iff x = 0$
      - Vecteur unitaire, vecteur normalisé.
      - Identité du parallélogramme. Dessin.
      - Identité de polarisation.
   3. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire
      - Le théorème (avec cas d'égalité) et sa démonstration.
      - Application 1 : inégalité triangulaire et cas d'égalité.
      - Le cas du produit scalaire euclidien usuel.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

      - Application 2 : $\sum_{i=1}^{n} a_i \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$.
      - Application 3 : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ à valeurs strictement positives. Montrer que

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)\left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}dt\right) \geq 1$$

2) Orthogonalité

   1. Vecteurs orthogonaux
      - Définition de deux vecteurs orthogonaux.
      - Théorème de Pythagore.
      - Définition d'une famille orthogonale, orthonormée.
      - Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
   2. sous-espaces orthogonaux et orthogonal d'un sev
      - Définitions d'un vecteur orthogonal à un sous-espace, définition de deux sous-espaces orthogonaux. Notation $F \perp G$.

- Définition de l'orthogonal d'un sous-espace F. Notation $F^\perp$.
- Exemples triviaux : $E^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = E$.
- Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$, si $D = \mathrm{Vect}(u = (a,b))$ est une droite, $D^\perp$ est une droite. Savoir donner l'équation cartésienne et un vecteur directeur (cas général).
- Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, si $D = \mathrm{Vect}(u = (a,b,c))$ est une droite, $D^\perp$ est un plan. Savoir donner l'équation cartésienne (cas général) et une base du plan (sur un exemple).
- Exemple $2'$: si P est le plan d'équation $ax + by + cz = 0$, $P^\perp$ est la droite engendrée par (a,b,c). Admis à ce stade.
- Exemple 3 : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathrm{Vect}(I_2)^\perp = \ker \mathrm{tr}$.
- Propriété 1 : $F \subset (F^\perp)^\perp$.
- Propriété 2 : Si $F \perp G$ alors la somme $F + G$ est directe.
- Propriété 3 : Si $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $x \in F^\perp \iff \langle x, e_p \rangle = 0$ pour tout p : il suffit d'être orthogonal à une famille génératrice (ou base) de F.

3. Algortithme d'orthonormalisation de Graam-Schmidt
   - Présentation de l'algorithme.
   - Application dans $\mathbb{R}^2$ avec le produit scalaire euclidien. Déterminer une famille orthonormée à partir de (u_1, u_2).
   - Application dans $\mathbb{R}^3$ avec le produit scalaire euclidien. Calculer une BON du plan d'équation $x + y + z = 0$.
   - Application dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)dt$. Déterminer une famille orthonormée à partir de à partir de $(1, X, X^2)$.
4. Base orthonormée dans un espace euclidien
   - Existence des bases orthonormées
   - Coordonnées d'un vecteur x dans une base orthonormée : $x = \sum_i \langle x, e_i \rangle e_i$
   - Expression du produit scalaire et de la norme

$$\langle x, y \rangle = \sum_i \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle \ ; \ ||x||^2 = \sum_i \langle x, e_i \rangle^2$$

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** :
  1. On note $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ le produit scalaire euclidien usuel sur $\mathbb{R}^n$. Vérifier que c'est un produit scalaire.
  2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité. *Le cas d'égalité n'est pas demandé dans la démonstration.*
- **Panier 2** :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire.
  2. Énoncer et démontrer le théorème de Pythagore : $x \perp y \iff ||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$.
- **Panier 3** :
  1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, montrer que $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ est un produit scalaire.
  2. Énoncer et démontrer l'identité de polarisation ainsi que l'identité du parallélogramme.
- **Panier 4** :
  1. Sur $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, montrer que $\langle f, g\rangle = \int_0^1 fg$ est un produit scalaire.
  2. Montrer qu'une famille finie de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux est libre.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.