DM 11 : So 2024

Partie I- Calcul d'une borne inférieure

Les questions qui suivent correspondent à la partie II du Problème 2 du sujet de Maths **CCINP 2024**.

Dans ce problème, on cherche à étudier l'existence de la borne inférieure suivante :

$$m = \inf \left\{ \int_0^1 \frac{(x^2 - ax - b)^2}{1+x} dx, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_1[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré au plus 1. Pour $(P,Q) \in E^2$, on pose

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x} dx.$$

Q1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur E. On note $|| \cdot ||$ la norme associée.

Q2. Les vecteurs 1 et X sont-ils orthogonaux pour ce produit scalaire ?

Q3. On note $L(X^2)$ le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. Justifier l'existence de réels α et β tels que $L(X^2) = \alpha X + \beta$.

Q4. Que peut-on dire du polynôme $X^2 - L(X^2)$ par rapport à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$? En déduire que (α, β) est solution du système linéaire :

$$\begin{cases} \alpha I_1 + \beta I_0 = I_2 \\ \alpha I_2 + \beta I_1 = I_3 \end{cases}$$

où, pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. On ne cherchera pas à calculer ces nombres. *Une étude de la suite (I_n) est néanmoins proposée dans le sujet (Partie I du Problème 2).*

Q5. Justifier l'existence du réel m et l'égalité suivante :

$$m = ||X^2 - \alpha X - \beta||^2.$$

On ne demande pas de simplifier cette expression.

Partie II- Approximation polynomiale d'une fonction à l'aide des moindres carrés

Ces questions sont issues du sujet de **Modélisation de CCINP 2024.**

Étant donnée une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on cherche un polynôme P de degré au plus n tel que la distance au sens des moindres carrés à la fonction f donnée soit minimale. On utilise donc la distance en moyenne quadratique dont le carré est donnée par

$$d(f,P)^2 = \int_0^1 |P(x) - f(x)|^2 dx.$$

On notera E l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on note

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx.$$

Q6. Monter que cela définit un produit scalaire sur E.

Soit n un entier non nul fixé. On cherche un polynôme P à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$(\mathcal{P}) \quad : \quad \forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \int_0^1 |P(x) - f(x)|^2 dx \leq \int_0^1 |Q(x) - f(x)|^2 dx.$$

Nous allons supposer dans un premier temps qu'un tel polynôme existe. On pose $Q = P + tR$ avec $t \in \mathbb{R}$ et $R \in \mathbb{R}_n[X]$.

Q7. Expliquer pourquoi l'inéquation de $(\mathcal{P})$ est équivalente à l'inéquation suivante :

$$(\mathcal{Q}) \quad : \quad \langle f - P, f - P \rangle \leq \langle f - P - tR, f - P - tR \rangle.$$

Q8. En déduire que :

$$t^2 \langle R, R \rangle - 2t \langle f - P, R \rangle \geq 0.$$

Q9. En faisant tendre t vers 0 par valeurs positives, montrer que :

$$\langle f - P, R \rangle \leq 0.$$

On pourra diviser par t.

Q10. En faisant tendre t vers 0 par valeurs négatives, montrer que :

$$\langle f - P, R \rangle \geq 0.$$

Q11. En déduire que $\forall R \in \mathbb{R}_n[X]$, $\langle f - P, R \rangle = 0$.

Q12. En déduire que si P existe alors P est unique.

Ce polynôme, s'il existe, est appelé **approximation de f au sens des moindres carrés**. Nous allons chercher à construire un tel polynôme P en considérant

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j,$$

avec pour tout entier $j \in \{0, \dots, n\}$, $a_j \in \mathbb{R}$.

Q13. Montrer, à l'aide de la **Q11**, que les coefficients a_j vérifient pour $0 \leq k \leq n$,

$$\sum_{j=0}^{n} a_j \int_0^1 x^{j+k} dx = \int_0^1 x^k f(x) dx.$$

Q14. On note $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que X vérifie un système linéaire de la forme $H_{n+1} X = Y$ où $Y \in \mathbb{R}^{n+1}$ est à donner et

$$H_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix}.$$

Q15. Justifier que H_{n+1} est diagonalisable. *Il suffit de dire que H_{n+1} est symétrique. Voir chapitre AL6.*

Q16. On admet que 0 n'est pas une valeur propre de H_{n+1}. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant l'égalité établie à la question **Q13**.

La résolution de ce système est un problème potentiellement difficile, cependant, l'approximation au sens des moindres carrés est de pratique courante.