Programme de khôlle. Semaine 18

Description des thèmes

AL5 - Espaces préhilbertiens

Pour les détails de 1) et 2), voir le programme de la semaine précédente : `https://cahier-de-prepa.fr/tsi2-doisneau/download?id=1722`

1) Produit scalaire et norme

   1. Définitions et premiers exemples
   2. Norme associée à un produit scalaire
   3. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire

2) Orthogonalité

   1. Vecteurs orthogonaux
   2. sous-espaces orthogonaux et orthogonal d'un sev
   3. Algortithme d'orthonormalisation de Graam-Schmidt
   4. Base orthonormée dans un espace euclidien

3) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

   1. Sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien. Si $\dim F$ est finie :
      - F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires.
      - $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
      - $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire de F orthogonal à F.
      - Cas E euclidien. Ces résultats sont valables pour **tous** les sev F. $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F$.
      - Exemple : $\mathrm{tr}(A^T B)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. $S_n(\mathbb{R})^{\perp} = A_n(\mathbb{R})$.
   2. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.
      - Définition : Si F est un sev de dimension finie, on définit la projection orthogonale sur F comme étant la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. Dessin. Cas euclidien.
      - Propriété 1 : Soit F sev de dimension finie. $p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.
      - Méthode 1 : Pour calculer $p_F(x)$, on peut chercher l'unique vecteur $y \in F$ tel que $x - y$ est orthogonal à F en écrivant un système d'équations traduisant l'orthogonalité à une base de F (ou famille génératrice). On peut donc : se donner une base de F $(e_1, \dots, e_p)$, écrire que $y = \sum_{i=1}^{p} y_i e_i$ puis écrire (et résoudre un système) à p équations $\langle x - y, e_i \rangle = 0$.
      - Propriété 2 : Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une **base orthonormée** de F, $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$. Démonstration.
      - Méthode 2 : Cette propriété donne une méthode effective de calcul de la projection orthogonale lorsque l'on connaît une base orthonormée de F.
      - Exemple important : projeté orthogonale sur une droite.

- Exemple : Projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sur $S_2(\mathbb{R})$.

3. Distance à un sous-espace de dimension finie
   - Définition $d(x, F) = \inf\{d(x, y), y \in F\}$.
   - Théorème : Le projeté orthogonal sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance $d(x, y)$ pour $y \in F$.
   - Application aux problèmeS de minimisiation.
   - Exemple : Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, trouver la droite "la plus proche de f "

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 |f(x) - ax + b^2 dx$$

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** : Calculer le projeté orthogonal de $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur le plan $F = \{x + y + z = 0\}$ puis la distance de u à F.
- **Panier 2** : Soit F un sous-espace de dimension finie dans un espace préhlbertien E et soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une BON de F. Montrer que si $x \in E$, le projeté orthogonal de x sur F est donné par
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i.$$
- **Panier 3** : Dans $\mathbb{R}^2$, montrer que si F est la droite normale au vecteur $n \neq 0$ et si $u \in \mathbb{R}^2$, la distance de u à F est donnée par
$$d(u, F) = \frac{\langle u, n \rangle}{||n||}$$
On commencera par calculer le projeté orthogonal de u sur F puis on appliquera le théorème du cours sur la distance à un sev.
- **Panier 4** : Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer les réels a et b qui minimisent
$$\int_0^1 |f(x) - ax - b|^2 dx$$
Le résultat sera donné en fonction de $I_0 = \int_0^1 f(x)dx$ et $I_1 = \int_0^1 xf(x)dx$.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.