An7 - Séries de Fourier

Calculs de coefficients de Fourier et applications

1 - *Le créneau.* Soit $T > 0$, $A \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in]0,1[$. On considère la fonction f T-périodique, définie pour $x \in [0, T[$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = A \text{ si } x \in [0, \alpha T[\\ f(x) = -A \text{ si } x \in [\alpha T, T[\end{array} \right.$$

1. Représenter la fonction f. La fonction f est-elle continue ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. On note $S_n(f)$ la série de Fourier de f. En justifiant votre réponse, justifier l'existence des limites de $S_n(f)(x)$ pour chacun des point x suivant et donner leur valeur : $x = 0$, $x = \frac{\alpha}{2}T$, $x = \alpha T$, $x = \frac{\alpha+1}{2}T$.

2 - Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [0, 2\pi[$.

1. Représenter la fonction f. La fonction f est-elle continue ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. La série de Fourier de f converge-t-elle vers $f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$?
4. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. On précisera le théorème utilisé.
5. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$. On précisera le théorème utilisé.

3 - Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ pour $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Représenter la fonction f. La fonction f est-elle continue ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. La série de Fourier de f converge-t-elle vers $f(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}$?
4. En écrivant la série de Fourier de f, en déduire que pour tout $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - |x|\right)$$

5. En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis retrouver la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$. On précisera le théorème utilisé.

4 - Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire est π-périodique.

Les coefficients de Fourier seront calculés pour la période $T = \pi$.

2. Calculer $a_0(f)$. On pourra faire le changement de variable $u = \tan t$.
3. Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a_{n+1}(f) + 6a_n(f) + a_{n-1}(f) = 0$.
4. En déduire les coefficients de Fourier, puis la série de Fourier de f. Que dire de sa convergence ?
5. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1+\cos^2(t))^2} dt$.

5 -Soit f la fonction définie par $f(x) = |\cos(x)|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est paire est π-périodique. On pourra utiliser le théorème de Parseval.
2. Calculer les coefficients de Fourier de f. *Les coefficients de Fourier seront calculés pour la période $T = \pi$.*
3. En précisant le (ou les) théorème(s) utilisés, dont on rappellera les hypothèses, déterminer les sommes suivantes

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} \ ; \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

6 ★ - Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = e^x$ pour tout $x \in [-\pi, \pi[$.

1. Représenter la fonction f. La fonction f est-elle continue ?
2. Calculer les coefficients de Fourier de f.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$. On précisera le théorème utilisé.

Exercices théoriques

7 -

1. Soit f une fonction continue et 2π-périodique. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n(f) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n(f) = 0$.
2. Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$.
   a) Soit $n \geq 1$. Établir une relation entre $a_n(f')$ et $b_n(f)$.
   b) En déduire que $b_n(f) = o(\frac{1}{n})$.
   c) Montrer de même que $a_n(f) = o(\frac{1}{n})$.

8 ★ - Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$.

1. Établir une relation entre les coefficients de Fourier de f' et ceux de f (pour $n \geq 1$).
2. On suppose que $a_0(f) = 0$.
   a) En utilisant le théorème de Parseval, montrer que

$$\int_0^T f^2(t)dt \leq \int_0^T f'(t)^2 dt$$

   b) Étudier le cas d'égalité.

9 - *Coefficients de Fourier complexes.* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application T-périodique continue. On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
On définit, pour $n \in \mathbb{Z}$, le coefficient de Fourier complexe

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-int}dt$$

1. Vérifier que $a_0(f) = c_0(f)$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \text{ et } c_{-n}(f) = \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)).$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer de même $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$.
4. En déduire la relation : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x)) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ik\omega x}$$

5. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$.