# Chapitre An7 : Séries de Fourier

## 1 Fonctions définies par morceaux

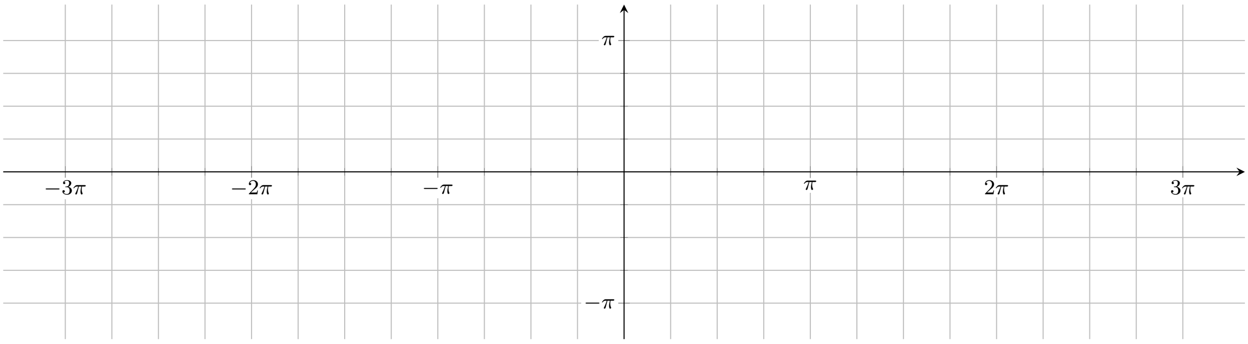


Figure 1 – Exemple 1 : La fonction $f$ est $2\pi$-périodique et définie pour $x \in ]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x$. Elle est $C^1$ par morceaux mais pas continue.

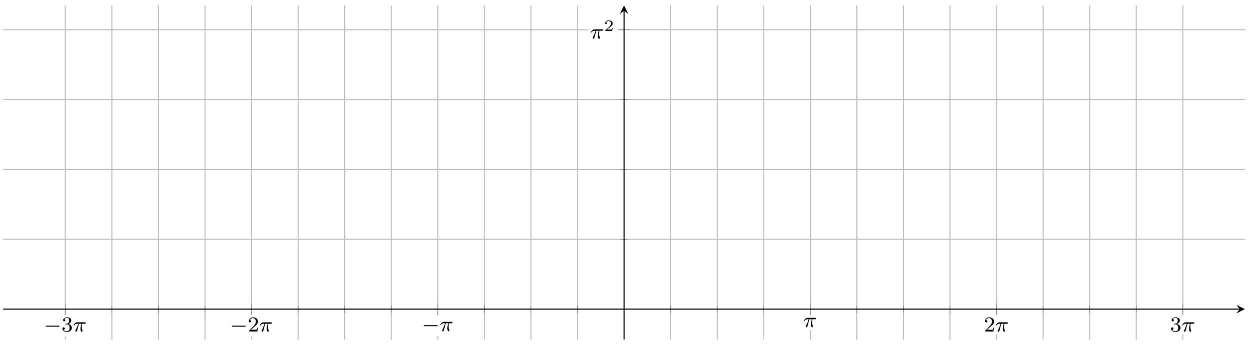


Figure 2 – Exemple 2 : La fonction $g$ est $2\pi$-périodique et définie pour $x \in ]-\pi, \pi]$ par $g(x) = x^2$. $g$ est $C^1$ par morceaux. $g$ est continue.

## 2 Coefficients et séries de Fourier d'une fonction $T$-périodique

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue par morceaux $T$-périodique.

### 2.1 Coefficients de Fourier

On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$a_0(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\cos(k\omega x)dx \text{ et } b_k(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(x)\sin(k\omega x)dx.$$

Proposition — Si la fonction est paire, les coefficients $b_n(f)$ sont tous nuls.
Si la fonction est impaire, les coefficients $a_n(f)$ sont tous nuls.

### 2.2 Deux exemples

**Exemple 1 :** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f$ de l'exemple 1.
**Exemple 2 :** Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $g$ de l'exemple 2.

### 2.3 Séries de Fourier

La série de Fourier de $f$ est la série de fonctions

$$x \mapsto a_0(f) + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)).$$

La somme partielle de la série de Fourier de $f$ est la fonction

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos(k\omega x) + b_k(f)\sin(k\omega x)).$$

## 3 Théorème de convergence

### 3.1 Théorème de Parseval

THÉORÈME DE PARSEVAL

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue par morceaux et $T$-périodique. Les séries $\sum a_n^2(f)$ et $\sum b_n^2(f)$ convergent et l'on a

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = a_0^2(f) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

**Exemple 1 :** Appliquer le théorème de Parseval à la fonction $f$ de l'exemple 1 pour obtenir la valeur d'une série.

**Exemple 2 :** Appliquer le théorème de Parseval à la fonction $g$ de l'exemple 2 pour obtenir la valeur d'une série.

### 3.2 Théorème de Dirichlet

THÉORÈME DE DIRICHLET

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^1$ par morceaux et $T$-périodique.
Soit $x \in \mathbb{R}$. La somme partielle de la série de Fourier de $f$ en $x$ converge et sa limite vaut $\frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-} f(y) + \lim_{y\to x^+} f(y)\right)$. Autrement dit,

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)) = \frac{1}{2}\left(\lim_{y\to x^-} f(y) + \lim_{y\to x^+} f(y)\right)$$

COROLLAIRE — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $C^1$ par morceaux et $T$-périodique.
Soit $x \in \mathbb{R}$. **On suppose que $f$ est continue en $x$.** La somme partielle de la série de Fourier de $f$ en $x$ converge vers $f(x)$. Autrement dit,

$$a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x)) = f(x)$$

**Exemple 1 :** Appliquer le théorème de Dirichlet en $x = 0$ et $x = \pi$ à la fonction $f$ de l'exemple 1 pour obtenir la valeur d'une série

**Exemple 1 :** Appliquer le théorème de Dirichlet en $x = 0$ à la fonction $g$ de l'exemple 2 pour obtenir la valeur d'une série.

# 4 La théorie des séries de Fourier cache un espace préhilbertien

## 4.1 L'espace préhilbertien $\mathcal{C}_T^0$

*Définition.*

Soit $T > 0$. On note $\mathcal{C}_T^0$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et $T$-périodiques.

PROPOSITION — $\mathcal{C}_T^0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

**Démonstration.** La fonction nulle est continue et $T$-périodique. Une combinaison linéaire de fonctions continues et $T$-périodique reste continue et $T$-périodique.

*Définition.*

On définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0$ par

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$$

PROPOSITION — $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}_T^0$.

**Démonstration.**

- Symétrie : Soit $f, g \in \mathcal{C}_T^0$,

  $\langle g, f\rangle =$

- Bilinéarité : Soit $f_1, f_2, g \in \mathcal{C}_T^0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

  $\langle f_1 + \lambda f_2, g\rangle =$

  qui est une conséquence de la linéarité de l'intégrale.

- Positivité : Soit $f \in \mathcal{C}_T^0$,

  $\langle f, f\rangle =$

- Définie : Soit $f \in \mathcal{C}_T^0$ telle que $\langle f, f\rangle = 0$. On a donc $\int_0^T f^2 = 0$. La fonction $f^2$ étant **continue et positive** sur $[0, T]$, on en déduit que pour tout $x \in [0, T]$, $f^2(x) = 0$ donc $f(x) = 0$. Par **périodicité**, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

□

Dans la suite, on note $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$.

*Définition.*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'élément suivant de $\mathcal{C}_T^0$ :

$$c_n : x \mapsto \cos(n\omega x).$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'élément suivant de $\mathcal{C}_T^0$ :

$$s_n : x \mapsto \sin(n\omega x).$$

**Quelques calculs :** Pour calculer les normes et produits scalaires qui suivent, nous aurons besoin de rappeler les formules de trigonométrie suivantes :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad ; \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a+b\right) + \cos\left(a-b\right)\right)$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(a-b\right) - \cos\left(a+b\right)\right)$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a+b\right) + \sin\left(a+b\right)\right)$$

- Si $n = 0$, $c_0$ est la fonction constante égale à 1. On a

  $||c_0||^2 =$

- . Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  $$\begin{aligned} ||c_n||^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega n x)dx \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left( \qquad\qquad\qquad\qquad \right) dx \\ &= \frac{1}{T}\left[ \qquad\qquad\qquad\qquad \right]_0^T \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

  $$\begin{aligned} ||s_n||^2 &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega n x)dx \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T \left( \qquad\qquad\qquad\qquad \right) dx \\ &= \frac{1}{T}\left[ \qquad\qquad\qquad\qquad \right]_0^T \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

- Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}
\langle c_n, c_m \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega n x)\cos(\omega m x)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \Big( \qquad\qquad\qquad\qquad \Big) dx \\
&= \frac{1}{T}\Big[ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_0^T \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

- Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$.

$$\begin{aligned}
\langle s_n, s_m \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \sin(\omega n x)\sin(\omega m x)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \Big( \qquad\qquad\qquad\qquad \Big) dx \\
&= \frac{1}{T}\Big[ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_0^T \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\langle c_n, s_m \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \cos(\omega n x)\sin(\omega m x)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T \Big( \qquad\qquad\qquad\qquad \Big) dx \\
&= \frac{1}{T}\Big[ \qquad\qquad\qquad\qquad \Big]_0^T \\
&= \\
&=
\end{aligned}$$

On en déduit le résultat suivant :

**Famille orthogonale de $\mathcal{C}_T^0$**

La famille $(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n, \dots)$ est une famille orthogonale de $\mathcal{C}_T^0$.
La famille $(c_0, \sqrt{2}c_1, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_n, \dots$ est une famille orthonormée de $\mathcal{C}_T^0$.

## 4.2 La somme partielle $S_n(f)$ est une projection orthogonale

*Définition.*

On note $E_0 = \mathrm{Vect}(c_0)$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathrm{Vect}(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n)$.

La famille $(c_0, c_1, s_1, \dots, c_n, s_n)$ étant orthogonale, c'est une base orthogonale de $E_n$. Une base orthonormée de $E_n$ est donc donnée par $(c_0, \sqrt{2}c_1, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_n)$.

**Interprétation géométrique de la série de Fourier**

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $f \in \mathcal{C}_T^0$. On note $S_n(f)$ la somme partielle d'ordre $n$ de la série de Fourier de $f$. Alors, $S_n(f)$ est le projeté orthogonal de $f$ sur $E_n$.

**Démonstration.** Soit $f \in \mathcal{C}_0^T$. Par le cours sur les espaces préhilbertiens, on sait que le projeté orthogonal de $f$ sur $E_n$, dont on connaît une BON, est donné par

$$p_{E_n}(f) = \langle c_0, f\rangle c_0 + \sum_{k=0}^{n} \left( \langle \sqrt{2}c_k, f\rangle \sqrt{2}c_k + \langle \sqrt{2}s_k, f\rangle \sqrt{2}s_k \right) = \langle c_0, f\rangle c_0 + \sum_{k=0}^{n} (2\langle c_k, f\rangle c_k + 2\langle s_k, f\rangle s_k)$$

Or,

$$\langle c_0, f\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt = a_0(f)$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2\langle c_n, f\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(\omega kt)dt = a_k(f) \text{ et } 2\langle s_n, f\rangle = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(\omega kt)dt = b_k(f)$$

On a donc

$$p_{E_n}(f) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(\omega kx) + b_k(f)\sin(\omega kx)$$

et l'on reconnaît la série de Fourier de $f$ d'ordre $n$.

## 4.3 Le théorème de Parseval, c'est Pythagore !

Le théorème de Pythagore dans un espace euclidien $E$ implique que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de $E$ et si $x \in E$,

$$||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$$

Dans le cas de l'espace $\mathcal{C}_T^0$, la famille $(c_0, \sqrt{2}c_1, \sqrt{2}s_1, \dots, \sqrt{2}c_n, \sqrt{2}s_n)$ est ce qu'on appelle une base Hilbertienne et l'égalité précédente se généralise : pour $f \in \mathcal{C}_T^0$,

$$||f||^2 = \langle f, c_0\rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, \sqrt{2}c_n\rangle^2 + \langle f, \sqrt{2}s_n\rangle^2 = a_0(f)^2 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \langle f, c_n\rangle^2 + \langle f, s_n\rangle^2$$

Au vu des calculs précédents, on retrouve donc le théorème de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(t)^2 dt = a_0(f)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(f) + b_n^2(f)$$