Programme de khôlle. Semaine 19

Description des thèmes

Le tableau des lois usuelles est à connaître par cœur.
`https://cahier-de-prepa.fr/tsi2-doisneau/download?id=1729`

Révisions de Proba : Chapitres P1 et P2

Voir les programmes de khôlle
`https://cahier-de-prepa.fr/tsi2-doisneau/download?id=1602`
`https://cahier-de-prepa.fr/tsi2-doisneau/download?id=1684`

P3 - Variables aléatoires discrètes

1) Généralités sur les variables aléatoires réelles discrètes

    1. Loi d'une variable aléatoire réelle.
    Définition d'une variable aléatoire réelle discrète. La famille des $(X = x)$ forme un S.C.E. Loi d'une variable aléatoire. Définition. Notation P_X. Elle est donnée par $X(\Omega)$ et les valeurs de $\mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$. Pour donner une loi, il suffit de se donner les p_n tels que $\sum p_n = 1$. Cas des VA à valeurs dans $\mathbb{N}$. Formule $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k-1)$ ou $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geq k) - \mathbb{P}(X \geq k+1)$. Définition de la variable image $f(X)$. Formule $\mathbb{P}(f(X) = y) = \sum_{x, f(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$. Exemple important : $f(x) = x^2$.

    2. Espérance d'une VAR.
    Définition pour une VAR discrète. Interprétation (moyenne). Même chose que dans le cas fini mais il faut vérifier que la série converge **absolument**. On peut néanmoins parler d'espérance infinie. Linéarité I ($\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y)$ et II ($\mathbb{E}(aX + b)$). Formule de transfert avec cas important $f(x) = x^2$.

    3. Variance et écart-type d'une VAR.
    $\mathbb{E}(X^2)$ fini $\implies$ $E(X)$ fini. Définition de la variance pour une variable aléatoire telle que X^2 possède une espérance finie. Interprétation comme un indicateur de dispersion. Ecart-type. Formule de Konig-Huygens (C'est la formule à utiliser en pratique) . Formule $V(aX + b) = a^2 V(X)$. Formule de Bienaymé-Tchebychev. Démonstration. Exemple d'application à la loi faible des grands nombres.

2) Deux nouvelles lois usuelles

    1. La loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$.
    Modélisation de la loi comme le rang du premier succès d'une série d'épreuves de Bernoulli indépendantes. Loi. Espérance. Variance. Exemple d'application : calcul de l'espérance dans le cas du problème du collectionneur.

    2. La loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
    Loi. Espérance. Variance. Interprétation : si $p_n = \lambda/n$, et si $X_n \sim B(n, p_n)$ alors X_n tend en loi vers une loi de Poisson de paramètre λ : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k) =$ Modélise des événements rares sur des temps longs.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p.
  1. Rappeler $X(\Omega)$ et les valeurs de $\mathbb{P}(X = n)$.
  2. Justifier que X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.
  3. Justifier que X^2 est d'espérance finie et calculer $V(X)$.
- **Panier 2** : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
  1. Rappeler $X(\Omega)$ et les valeurs de $\mathbb{P}(X = n)$.
  2. Justifier que X est d'espérance finie et calculer $\mathbb{E}(X)$.
  3. Justifier que X^2 est d'espérance finie et calculer $V(X)$.
- **Panier 3** : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n+1)}$$
  1. Justifier que cela définit effectivement une loi sur $\mathbb{N}^*$.
  2. X est-elle d'espérance finie ?
  3. $\sqrt{X}$ est-elle d'espérance finie ?
- **Panier 4** : Soit $\lambda > 0$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note X_N une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètre N et $\frac{\lambda}{N}$.
  1. Rappeler, pour $k \in \{0, \dots, N\}$ la valeur de $\mathbb{P}(X_N = k)$ en fonction de λ, k et N. Dans la suite, on fixe $k \in \mathbb{N}$.
  2. Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \binom{N}{k} \frac{\lambda^k}{N^k} = \frac{\lambda^k}{k!}$.
  3. Montrer que $\lim_{N\to+\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right)^{N-k} = e^{-\lambda}$.
  4. En déduire la valeur de
$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}(X_N = k)$$
  5. Que retrouve-t-on ?

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.