On divise par $\dfrac{1}{2n}$: $\dfrac{2n}{2(n+1)} \leqslant \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}} \leqslant 1$; or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2(n+1)} = 1$; par théorème d'encadrement, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$; ce qui prouve que

$$\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}}$$

Partie II

Q36.

- *Symétrie :* $\langle Q,P\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{Q(x)P(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{P(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \langle P,Q\rangle$; donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est symétrique.
- *Bilinéarité :* Soient P_1, P_2, Q trois polynômes et λ un réel ;
  $\langle \lambda P_1 + P_2, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{(\lambda P_1(x)+P_2(x))Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x = \lambda\int_0^1 \frac{P_1(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{P_2(x)Q(x)}{1+x}\,\mathrm{d}x$
  $= \lambda\langle P_1,Q\rangle + \langle P_2,Q\rangle$ et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est linéaire à gauche, et donc bilinéaire par symétrie.
- *Positivité :* $\langle P,P\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(P(x)\big)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale, et donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive.
- *Définie-positivité :* $\langle P,P\rangle = 0 \iff \displaystyle\int_0^1 \frac{\big(P(x)\big)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0$; la fonction $x \mapsto \dfrac{\big(P(x)\big)^2}{1+x}$ est continue et positive sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle, donc $\forall x\in[0,1],\ \dfrac{\big(P(x)\big)^2}{1+x} = 0 \iff \forall x\in[0,1],\ P(x)=0$; ainsi P possède une infinité de racines, il s'agit donc du polynôme nul, et $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est définie-positive

$\boxed{\langle\cdot,\cdot\rangle \text{ est symétrique, bilinéaire, positive et définie-positive, c'est un produit scalaire sur } \mathbb{R}[X]}$

Q37. $\langle 1, X\rangle = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x}\,\mathrm{d}x = I_1 = 1-\ln(2) \neq 0$; donc $\boxed{1 \text{ et } X \text{ ne sont pas orthogonaux}}$

Q38. $L(X^2)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, donc $L(X^2)\in\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Vect}(1,X)$; et donc

$$\boxed{\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad L(X^2) = \alpha X+\beta}$$

Q39. $L(X^2)$ est le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$, donc on peut dire que $\boxed{X^2 - L(X^2) \text{ est orthogonal à } \mathbb{R}_1[X]}$

Ainsi $\begin{cases} \langle 1, X^2 - L(X^2)\rangle = 0 \\ \langle X, X^2 - L(X^2)\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \langle 1, X^2 - \alpha X - \beta\rangle = 0 \\ \langle X, X^2 - \alpha X - \beta\rangle = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-\alpha x-\beta}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3-\alpha x^2-\beta x}{1+x}\,\mathrm{d}x = 0 \end{cases}$

par linéarité de l'intégrale, on obtient $\begin{cases} I_2 - \alpha I_1 - \beta I_0 = 0 \\ I_3 - \alpha I_2 - \beta I_1 = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} I_1\alpha + I_0\beta = I_2 \\ I_2\alpha + I_1\beta = I_3 \end{cases}}$

Q40. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2-ax-b)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \langle X^2-aX-b, X^2-bX-b\rangle = \|X^2-aX-b\|^2$;
donc $m = \inf\{\|X^2-aX-b\|^2,\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$, c'est-à-dire que m est le carré de la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ et on sait que cette distance peut être définie par $\|X^2-L(X^2)\|$; ce qui donne bien

$$\boxed{m = \|X^2-\alpha X-\beta\|^2 = \int_0^1 \frac{(x^2-\alpha x-\beta)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x}$$

Partie II

Q41. $f\big((a,b)\big) = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x^2-ax-b)^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^4+a^2x^2+b^2-2ax^3-2bx^2+2abx}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et par linéarité, on a :

$$\boxed{f\big((a,b)\big) = a^2I_2 + b^2I_0 + 2abI_1 - 2aI_3 - 2bI_2 + I_4}$$

Q42. f est une fonction polynomiale en a et b donc $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^2}$

Q43. On résout $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial b} = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2I_2 a + 2I_1 b - 2I_3 = 0 \\ 2I_0 b + 2I_1 a - 2I_2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} I_2 a + I_1 b = I_3 \\ I_1 a + I_0 b = I_2 \end{array}\right.$ ✪ ; ce système admet une unique solution si et seulement le déterminant $\begin{vmatrix} I_2 & I_1 \\ I_1 & I_0 \end{vmatrix} = I_2 I_0 - I_1^2$ est non nul.

Or $I_2 I_0 - I_1^2 = \left(-\dfrac{1}{2} + \ln(2)\right)\ln(2) - (1-\ln(2))^2 = -\dfrac{\ln(2)}{2} + \left(\ln(2)\right)^2 - 1 + 2\ln(2) - \left(\ln(2)\right)^2 = \dfrac{3}{2}\ln(2) - 1$

On nous donne : $0,68 \leqslant \ln(2) \leqslant 0,7 \Rightarrow 1,02 \leqslant \frac{3}{2}\ln(2) \leqslant 1,05$.

On a donc $I_2 I_0 - I_1^2 \neq 0$, ce qui prouve que le système a une unique solution et donc que

$$\boxed{f((a,b)) \text{ possède un unique point critique}}$$

Q44. Dans l'énoncé, il est admis que $f((a,b))$ admet un minimum atteint en un unique couple de réels ; comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert et que f est de classe $\mathscr{C}^1$, alors ce minimum est atteint en un point critique.

D'après la question précédente et après résolution de ✪ on peut donc dire que m est atteint pour (a,b) avec

$$\boxed{a = \frac{I_0 I_3 - I_1 I_2}{I_0 I_1 - I_1^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{I_2^2 - I_1 I_3}{I_0 I_2 - I_1^2}}$$