Mathématiques 1

TSI **2022**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Notations

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, I_n la matrice identité d'ordre n à coefficients réels et 0_n la matrice nulle d'ordre n.

$\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ désigne l'application identité sur $\mathbb{R}^n$.

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ des puissances de A par

$$\begin{cases} A^0 = I_2, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad A^{n+1} = A\,A^n. \end{cases}$$

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, avec $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, on dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si chacune des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note alors

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n & \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n & \lim\limits_{n\to+\infty} d_n \end{pmatrix}.$$

On note $\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x \end{array}\right.$ la fonction exponentielle réelle.

Objectif

L'objectif de ce problème est d'étudier des extensions de cette fonction à différents ensembles et d'en traiter quelques applications.

Il est demandé aux candidats de mentionner clairement les résultats qu'ils utilisent pour répondre aux différentes questions du problème.

☞ Ce symbole identifie des questions largement faisables. C'est un petit coup de pouce de la part de votre cher professeur. Cela ne veut pas dire qu'il ne faut pas essayer de chercher les autres. Toute la partie IV est concernée !

I L'exponentielle réelle

I.A – Une équation fonctionnelle

On se propose de déterminer l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} f(1) = \mathrm{e}, \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases} \tag{I.1}$$

☞ **Q 1.** Justifier que la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x$ est solution de (I.1).

On se propose de démontrer que c'est la seule solution.

Pour cela, on suppose que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions (I.1).

☞ **Q 2.** Pour tout nombre réel x, calculer $f(x)f(1-x)$.

Q 3. En déduire que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, puis que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Démontrer que $f(0) = 1$.

Q 5. Justifier que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \qquad f'(s+t) = f'(s)f(t).$$

Q 6. En donnant à s une valeur bien choisie, démontrer qu'il existe une constante k réelle telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f(t) = k\mathrm{e}^{f'(0)t}.$$

Q 7. Déterminer les valeurs de k et de $f'(0)$ et justifier que f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = y(t). \end{cases} \tag{I.2}$$

Q 8. En déduire que le problème (I.1) a une solution unique que l'on donnera.

☞ **Q 9.** Donner le développement en série entière en 0 de cette solution et préciser le rayon de convergence de la série entière.

I.B – Un problème de probabilité faisant intervenir l'exponentielle réelle

☞ **Q 10.** Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x} - 1 + x$ et en déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \mathrm{e}^{-x} > 1 - x.$$

Dans cette sous-partie, θ et α sont deux nombres réels strictement positifs et on pose

$$p = \frac{1 - \mathrm{e}^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}.$$

☞ **Q 11.** Justifier que $p \in]0, 1[$.

On pose $q = 1 - p$.

Un service d'urgences médicales de capacité supposée illimitée reçoit des patients entre l'instant 0 et l'instant θ inclus. On modélise le nombre de patients arrivés dans le service au cours de l'intervalle de temps $[0, \theta]$ par une variable aléatoire N_θ suivant la loi de Poisson de paramètre θ.

On rappelle que, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N_\theta = k) = \dfrac{\theta^k}{k!}\mathrm{e}^{-\theta}$.

On suppose par ailleurs qu'un patient arrivé dans le service entre les instants 0 et θ a la probabilité p d'être toujours présent dans le service au-delà de l'instant θ. On fait l'hypothèse que les instants aléatoires de sortie des urgences sont mutuellement indépendants. On note R_θ le nombre de patients arrivés entre les instants 0 et θ qui sont encore présents dans le service au-delà de l'instant θ.

Q 12. Pour $(s, k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}\big((R_\theta = k) \mid (N_\theta = s)\big)$, probabilité conditionnelle de $(R_\theta = k)$ sachant $(N_\theta = s)$. On distinguera les cas $k \leqslant s$ et $k > s$.

Q 13. Pour tous entiers s et k tels que $k \leqslant s$, démontrer que

$$\mathbb{P}\big(R_\theta = k) \cap (N_\theta = s)\big) = \frac{\mathrm{e}^{-\theta}(p\theta)^k(q\theta)^{s-k}}{k!\,(s-k)!}.$$

Q 14. En utilisant la formule des probabilités totales, calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $\mathbb{P}(R_\theta = k)$ en fonction de k, p et θ.

Q 15. Reconnaitre la loi de probabilité de R_θ et donner la valeur de son espérance $\mathbb{E}(R_\theta)$.

II Forme exponentielle des fonctions trigonométriques

On rappelle que l'exponentielle est définie sur l'ensemble des nombre imaginaires purs par l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \cos(t) + \mathrm{i}\sin(t).$$

Dans le plan complexe, on considère la courbe paramétrée Γ formée par l'ensemble des points $M(t)$ d'affixe

$$z(t) = \frac{1}{3}\big(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\big),$$

où t décrit l'ensemble $\mathbb{R}$. Le point $M(t_0)$ est dit stationnaire si $z'(t_0) = 0$.

☞ **Q 16.** Pour tout nombre réel t, exprimer en fonction de $z(t)$ les nombres $z(t + 2\pi)$ et $z(-t)$.

☞ **Q 17.** En déduire un intervalle de la forme $[0, \gamma]$ (avec $0 < \gamma < 2\pi$) et une transformation géométrique simple permettant d'obtenir la courbe Γ toute entière à partir de sa restriction à l'intervalle $[0, \gamma]$.

☞ **Q 18.** Déterminer trois nombres réels $t_1 < t_2 < t_3$ appartenant à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ tels que les points $M(t_1)$, $M(t_2)$ et $M(t_3)$ sont des points stationnaires de Γ.

Q 19. Préciser la nature du triangle formé par ces trois points.

Q 20. Pour tout nombre réel t, exprimer $z\left(t + \dfrac{2\pi}{3}\right)$ en fonction de $z(t)$.

Q 21. En déduire une transformation géométrique laissant globalement invariante la courbe Γ.

Q 22. Dresser le tableau des variations conjointes des fonctions $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$ sur un intervalle bien choisi. On admet que la tangente au point stationnaire $M(t_2)$ est l'axe des abscisses. En déduire les tangentes aux points $M(t_1)$ et $M(t_3)$, puis tracer la courbe Γ.

Q 23. Calculer la longueur de la courbe Γ.

III Exponentielles de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dans cette partie, l'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et est orienté par la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$.

III.A – On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

☞ **Q 24.** Démontrer que $F_1 = \ker(f - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $F_2 = \ker(f - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles supplémentaires. Préciser un vecteur directeur u_1 de F_1 et un vecteur directeur u_2 de F_2.

On note q_1 le projecteur sur la droite F_1 parallèlement à la droite F_2 et q_2 le projecteur sur la droite F_2 parallèlement à la droite F_1.

Q 25. Déterminer la matrice Q_1 de l'endomorphisme q_1 dans la base $\mathcal{B}$ et la matrice Q_2 de l'endomorphisme q_2 dans cette même base. * voir indication en bas de page.

Q 26. Justifier les égalités

$$Q_1^2 = Q_1, \qquad Q_2^2 = Q_2, \qquad Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = 0_2, \qquad Q_1 + Q_2 = I_2 \qquad \text{et} \qquad A = Q_1 + 2Q_2.$$

Q 27. Démontrer que, pour tout entier naturel k, $A^k = Q_1 + 2^k Q_2$.

☞ **Q 28.** Donner les développements en série entière au voisinage de zéro des fonction cosinus et sinus.

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel t, on note $E_n(t)$ la matrice $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$.

Q 29. Pour tout nombre réel t, justifier que la suite $\big(E_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice $E(t) = \mathrm{e}^t Q_1 + \mathrm{e}^{2t} Q_2$.

Q 30. En déduire que

$$\begin{cases} E(0) = I_2, \\ \forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad E(t+s) = E(t)E(s), \\ \forall t \in \mathbb{R}, \qquad\quad E'(t) = AE(t). \end{cases}$$

Q 31. Justifier la notation $E(t) = \mathrm{e}^{tA}$, valable pour tout nombre réel t.

III.B – On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

☞ **Q 32.** g est-il diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Et sur $\mathbb{C}$?

☞ **Q 33.** Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, exprimer B^{2n} et B^{2n+1} en fonction de n, I_2 et B.

Pour tout entier naturel n et tout nombre réel t, on note $R_n(t)$ la matrice $R_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} B^k$ et on l'écrit sous la forme

$$R_n(t) = \begin{pmatrix} \alpha_n(t) & \beta_n(t) \\ \gamma_n(t) & \delta_n(t) \end{pmatrix}.$$

Q 34. Démontrer que les quatre suites $\big(\alpha_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\beta_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(\gamma_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\delta_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On pourra considérer les suites extraites $(R_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(R_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

On note alors $R(t) = \lim_{n\to+\infty} R_n(t)$.

☞ **Q 35.** On admet que $R(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$. $R(t)$ est-il diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Et sur $\mathbb{R}$? On pourra distinguer selon la valeur de t.

* *Indication : On commencera par écrire la matrice dans la base (u_1, u_2) puis on utilisera une matrice de changement de base.*

☞ IV Un système différentiel

Commentaire de M. Vacossin : cette dernière partie du sujet est cadeau !

Dans cette partie, on identifie tout élément u de $\mathbb{R}^3$ avec la matrice colonne associée.
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q 36. Déterminer le rang de la matrice $A - I_3$ et démontrer que les deux vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

forment une base de $\ker(A - I_3)$.

Q 37. Déterminer le rang de la matrice $A + I_3$ et démontrer que le vecteur

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur directeur de $\ker(A + I_3)$.

Q 38. Justifier que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Q 39. Déterminer une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.

Q 40. Résoudre le système différentiel linéaire

$$X'(t) = AX(t) \tag{IV.1}$$

où la variable t est réelle et $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$.

On pourra poser $X(t) = PY(t)$ où $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

On rappelle que, pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution X de (IV.1) vérifiant

$$X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Q 41. Déterminer une fonction

$$\left| \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \to & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ t & \to & M(t) \end{array} \right.$$

telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad X(t) = M(t) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

On pourrait démontrer, ce qui n'est pas demandé dans le cadre de ce problème, que, pour tout nombre réel t, $M(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

• • • FIN • • •