Programme de khôlle. Semaine 20

Description des thèmes

An7 - Séries de Fourier

1) Fonctions définies par morceaux

   1. Fonctions continues et C^1 par morceaux sur un segment. Définition. Intégrale.
   2. Fonctions continues et C^1 par morceaux T-périodiques. Intégrale d'une fonction T-périodique sur une période. L'intégrale ne dépend pas de l'intervalle de taille T.
   3. Cas utile : f est continue/de classe C^1 sur $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$ et $\tilde{f}$ est la fonction T-périodique telle que pour tout $x \in [0, T[$ ou $]-T/2, T/2]$, $\tilde{f}(x) = f(x)$. Condition de continuité sur $\mathbb{R}$.
      - Exemple 1 : $f(x) = x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$ et f est 2π-périodique. La fonction n'est pas continue.
      - Exemple 2 : $f(x) = x^2$ pour $x \in,]-\pi, \pi]$ et f est 2π-périodique. La fonction est continue.

2) Coefficients et série de Fourier d'une fonction T-périodique

   1. Coefficients de Fourier
      - Définitions des coefficients de Fourier trigonométriques :
      $$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$
      Pour $k \geq 1$, avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$,
      $$a_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(k\omega t)dt \text{ et } b_k(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(k\omega t)dt$$
      - Cas des fonctions paires et impaires sur $]-T/2, T/2[$.
   2. Exemples de calculs. Les exemples 1 et 2 ont été traités en classe.
   3. Séries de Fourier. Série de Fourier d'une fonction en x. Somme partielle de la série de Fourier.

3) Théorèmes de convergence.

   1. Théorème de Parseval
   2. Énoncé du théorème. Application au calcul de somme sur les exemples 1 et 2.
   3. Théorème de Dirichlet. Énoncé du théorème. Valable pour des fonctions de classe C^1 par morceaux. Cas des fonctions continues C^1 par morceaux : la série de Fourier de f converge vers f en tout point x. Application au calcul de sommes sur les exemples 1 et 2.

4) Interprétation géométrique dans le cas des fonctions continues

   1. L'espace $\mathcal{C}_T^0$ des fonctions continues T-périodique
   2. La somme partielle de la série de Fourier est une projection orthogonale
   3. Parseval, c'est Pythagore.

Questions de cours

Le khôlleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** :
  1. Rappeler l'énoncé exact du théorème de Parseval.
  2. Rappeler l'énoncé exact du théorème de Dirichlet.
  3. Justifier que l'on peut appliquer le théorème de Dirichlet à la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π périodique et définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par $f(x) = x$. Vers quelle valeur converge la série de Fourier de f en $x = 0$? Et en $x = \pi$?
- **Panier 2** : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π périodique et définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par
$$f(x) = x$$
  1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
  2. En appliquant le théorème de Parseval, retrouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- **Panier 3** : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π périodique et définie pour $x \in]-\pi, \pi]$ par
$$f(x) = x^2$$
  1. Calculer les coefficients de Fourier de f.
  2. En appliquant le théorème de Parseval, retrouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
- **Panier 4** : Soit $T > 0$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Calculer les intégrales suivantes :
  1. $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega x) \cos(m\omega x) dx$, en distinguant selon que $n = m$ ou pas.
  2. $\frac{1}{T} \int_0^T \cos(n\omega x) \sin(m\omega x) dx$

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.