

AL6 - Isométries d'un espace euclidien

Isométries d'un espace euclidien et matrices orthogonales

1  - Inspiré de CCINP 2019. On note $E = S_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices symétriques réelles de taille 2. Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \in E$, on pose

$$\langle M, M' \rangle = aa' + 2bb' + cc'$$

On considère l'application f sur E par : $\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$,

$$f(M) = \begin{pmatrix} \frac{a+c}{2} - b & \frac{a-c}{2} \\ \frac{a-c}{2} & \frac{a+c}{2} + b \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E . *Ne pas oublier de vérifier que $f(E) \subset E$.*
3. Montrer que f est une isométrie de E .
4. On considère la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
 - a) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E .
 - b) Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.
 - c) Retrouver que f est une isométrie.

2 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $O_n(\mathbb{R})$.

3 ★ - Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales de $O_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers est fini, et déterminer son cardinal.

4 ★ - Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in O(E)$.

1. Soit $\lambda \in Sp(f)$ une valeur propre (réelle) de f . Montrer que $\lambda \in \{-1, 1\}$.
2. Montrer que $\det(f^{-1} - \text{Id}_E) = \det(f - \text{Id}_E)$.

3. On suppose que f est directe et que n est impair. Montrer que 1 est valeur propre de f .

4. On suppose que f est indirecte. Montrer que -1 est valeur propre de f .

5 ★ - Soit E un espace euclidien de dimension *net* oit $u \in O(E)$. On note $v = \text{Id}_E - u$. Montrer que

$$\ker(v) = (\text{Im } v)^\perp.$$

Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

6  - Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ des isométries suivantes :

- a) la rotation vectorielle d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$
- b) la symétrie orthogonale d'axe dirigé par le vecteur $u = (1, 2)$.

7 - Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ des isométries suivantes :

- a) la rotation vectorielle d'angle $\theta = \arccos(-1/4)$
- b) la symétrie orthogonale d'axe dirigé par le vecteur $u = (3, 4)$.

8  - Pour chacune des matrices suivantes :

- i) Vérifier qu'elle est dans $O_2(\mathbb{R})$ et préciser si l'isométrie est directe ou indirecte ;
- ii) Préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé.

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

9 - Mêmes consignes que l'exercice précédent avec

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

10  - Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des isométries vectorielles suivantes :

- la rotation vectorielle d'axe dirigé par $\text{Vect}(1, 1, 1)$ et d'angle $\theta = \pi/6$.
- la réflexion par rapport au plan d'équation $x + 2y - z = 0$.

11 - Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des isométries vectorielles suivantes :

- la rotation vectorielle d'axe dirigé par $\text{Vect}(1, 1, 0)$ et d'angle $\theta = \pi/4$.
- la réflexion par rapport au plan d'équation $x + y + z = 0$.

12  - Extrait de CCINP 2019. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

- Montrer que $A \in O_3(\mathbb{R})$.
- L'isométrie associée à la matrice A est-elle directe ou indirecte ?
- Démontrer que $\ker(A - I_3)$ est une droite vectorielle dont on donnera un vecteur directeur $\vec{u}$.
- Soit $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\det(\vec{u}, \vec{j}, A\vec{j})$.
- Déterminer les caractéristiques de l'isométrie associée à A dans $\mathbb{R}^3$.
- Calculer A^{13} .

13  - Pour chacune des matrices suivantes :

- Vérifier qu'elle est dans $O_3(\mathbb{R})$ et préciser si l'isométrie est directe ou indirecte ;
- Préciser les éléments caractéristiques de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé.

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

14 - Même consignes avec

$$D = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Applications du théorème spectral

15  - Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et nilpotente (=il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$). Montrer que $M = 0$.
- Application : soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $(A + A^T)^p = 0$. Montrer que A est antisymétrique.

16 ★ - Démonstration en dimension 2. Dans cet exercice, on va démontrer le théorème spectral en dimension 2. On considère alors une matrice symétrique

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in S_2(\mathbb{R})$$

et on veut montrer qu'elle est diagonalisable dans une base orthonormée.

- Calculer χ_A et vérifier que le discriminant Δ de χ_A vaut $(a - c)^2 + 4b^2$.
- Traiter le cas $\Delta = 0$.
- On traite le cas $\Delta > 0$.
 - Justifier que A possède deux valeurs propres distinctes.
 - Montrer que les sous-espaces propres sont orthogonaux.
 - Conclure.

17 ★ - Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$ telle que $M^p = I_n$. Que vaut M^2 ?