Programme de khôlle. Semaine 21

Description des thèmes

AL6 - Isométries d'un espace euclidien

1) Isométries d'un espace euclidien

   1. Définition, caractérisation et premiers exemples
      - Définition d'une isométrie par conservation de la norme.
      - Définition du groupe orthogonal $O(E)$.
      - Caractérisation par conservation du produit scalaire.
      - Caractérisation par l'image d'une BON.
      - Exemple 1 : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien canonique, $(x, y) \mapsto (y, x)$.
      - Exemple 2 : Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de $\mathrm{tr}(a^T b)$, $M \mapsto M^T$.
      - Exemple 3 : Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$, $\varphi : P(X) \mapsto P(1 - X)$
   2. Propriétés principales. "$O(E)$ est un groupe". Si un sev est stable par une isométrie, son orthogonal est également stable (admis).
   3. Les symétries orthogonales. Définition d'une symétrie orthogonale par rapport à un sev F, notée s_F. On a alors $F = \ker(s - \mathrm{Id}_E)$. $s_F \in O(E)$. Les réflexions. Cas de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ avec un joli dessin.

2) Matrices orthogonales

   1. Définitions
      - Une matrice orthogonale est une matrice qui vérifie $A^T A = I_n$. Définition de $O_n(\mathbb{R})$. Exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. "$O_n(\mathbb{R})$ est un groupe. "
      - Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, l'application $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique.
      - Déterminant des matrices orthogonales. Groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbb{R})$. Isométrie directe ou indirecte de $\mathbb{R}^n$.
   2. Matrices orthogonales et bases
      - Si $A \in O_n(\mathbb{R})$, les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ euclidien canonique. Idem pour les lignes.
      - $\mathcal{B}_0$ est une BON d'un espace euclidien E et si $\mathcal{B}$ est une autre base de E, alors $\mathcal{B}$ est une BON ssi la matrice de passage est orthogonale.
      - Notion d'orientation d'un espace euclidien. Bases directes et indirectes. Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   3. Matrices orthogonales et isométries vectorielles
      - Si $\mathcal{B}_0$ est une BON d'un espace euclidien E et si $u \in L(E)$, alors $u \in O(E) \iff Mat_{\mathcal{B}_0} \in On_(\mathbb{R})$.
      - Déterminants d'une isométrie.
      - Groupe spécial orthogonal de E. Isométries directes et indirectes.
      - Cas des symétries orthogonales. La matrice est de plus symétrique.

3) Isométries vectorielles du plan et de l'espace

   Une isométrie de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est identifiée à sa matrice dans la base canonique (qui est une BOND) et réciproquement.

1. Les symétries orthogonales du plan et de l'espace
   - Si la matrice est orthogonale et symétrique, c'est la matrice d'une symétrie orthogonale.
   - Savoir-faire 1 : dire de quelle symétrie il s'agit et donc déterminer $F = \ker(A - \mathrm{Id})$.
   - Savoir-faire 2 : écrire la matrice d'une symétrie dans une base orthonormée. Utilisation de la formule de changement de base dans le cas d'une BON : $P^{-1} = P^T$.
2. Isométries vectorielles du plan.
   - Cas de $SO_2(\mathbb{R})$: $\exists \theta \in \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}_\theta$. Dans toute BOND, la matrice est R_θ.
   - Propriétés des matrices de rotations : $R_\theta R_\psi = R_{\theta+\psi}$. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$. Calcul de puissance d'une rotation.
   - Cas de $O_2^-(\mathbb{R})$: la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$. Puisque que la matrice est symétrique, c'est une symétrie orthogonale. Dans une BOND, à savoir trouver, on a comme matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Isométries vectorielles de l'espace
   - Une isométrie de $\mathbb{R}^3$ possède nécessairement une valeur propre.
   - Cas $SO_3(\mathbb{R})$. Rotation dont les éléments caractéristiques sont l'axe (=droite stable) et l'angle. matrice dans une BOND adaptée : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.
   - Savoir-faire 1 : déterminer l'axe (=vecteur propre $\overrightarrow{u}$) et l'angle avec la méthode :$\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ est du signe de $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, A\overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires. Attention au cas $\cos(\theta) = -1$. C'est un demi-tour ! ($\sin(\theta) = 0$). C'est aussi une symétrie par rapport à une droite.
   - Savoir-faire 2 : à partir d'un axe et d'un angle, écrire la matrice de la rotation d'axe $\overrightarrow{u}$ et d'angle θ.
   - Calcul de puissance d'une rotation.
   - Cas $O_3^-(\mathbb{R})$: matrice dans une BOND adaptée : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$.
   - Savoir-faire : déterminer l'axe (=vecteur propre $\overrightarrow{u}$ associé à -1) et l'angle avec la méthode :$\mathrm{tr}(A) = -1 + 2\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ est du signe de $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, A\overrightarrow{v})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires. Attention au cas $\cos(\theta) = 1$ (et $\sin(\theta) = 0$).

4) Réduction des matrices symétriques réelles

- Les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont toutes réelles. Admis.
- Fait utile : si $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$, alors $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$.
- Les sous-espaces propres d'une matrice symétriques sont deux à deux orthogonaux. Démonstration faite.
- Théorème spectral : si $A \in S_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telle que $A = PDP^{-1} = PDP^T$.
- Exemple d'application : $A^T A$ est diagonalisable.

Questions de cours

Le kholleur fera son marché dans l'un des paniers suivants.

- **Panier 1** : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan F d'équation $x + y - 2z = 0$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Montrer que la matrice de s dans la base canonique est donnée par
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- **Panier 2** : On se place dans $\mathbb{R}^2$.
  1. Rappeler la forme de la matrice R_θ de la rotation d'angle θ dans la base canonique.
  2. Soit $\theta, \psi \in \mathbb{R}$, montrer que $R_\theta \times R_\psi = R_{\theta+\psi}$.
  3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.
     (a) Montrer que $A \in SO_2(\mathbb{R})$ puis déterminer l'angle de la rotation qu'elle représente.
     (b) Calculer A^5.

- **Panier 3** : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  1. Vérifier que $A \in SO_3(\mathbb{R})$.
  2. Identifier les caractéristiques de A (axe et angle).

- **Panier 4** :

  On considère le vecteur $u = (1, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$. On note A la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe $\mathbb{R}u$.
  1. Déterminer la matrice A.
  2. Explique comment calculer A^3.

Exercice(s) au choix

Au choix du colleur, sur le chapitre de la semaine.