DM 13 : Les lois usuelles

Les parties I et II sont obligatoires.
La partie III est facultative.

Partie I- La loi binomiale

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

Q1. Rappeler l'image de X et les valeurs de $\mathbb{P}(X=k)$ pour k dans l'image de X.

On définit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Q2. Montrer que g est dérivable et justifier que $g'(1) = \mathbb{E}(X)$.

Q3. A l'aide du binôme de Newton, montrer que $g(t) = (tp + (1-p)^n$. En déduire la valeur de $g(1)$.

Q4. En dérivant g à l'aide de l'expression de la question 3, retrouver la formule donnant $\mathbb{E}(X)$ en fonction de n et p.

Partie II- Loi binomiale et loi de Poisson

Une femelle lapin donne naissance à un nombre aléatoire de lapereaux dans une portée. On supposera que ce nombre, noté N, suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$N \sim \mathcal{P}(\lambda).$$

Lorsque l'on regarde un lapereau, celui-ci a une probabilité $p \in]0,1[$ d'être une femelle. On note alors F le nombre de lapereaux femelles d'une portée. L'objectif de cette partie est de déterminer la loi de F.

Q5. Rappeler l'image $N(\Omega)$ et les valeurs de $\mathbb{P}(N=n)$ pour $n \in N(\Omega)$.

Q6. Que vaut $F(\Omega)$?

Dans la suite, on fixe $k \in \mathbb{N}$ et l'on veut calculer $\mathbb{P}(F=k)$.

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $n < k$. Que vaut alors $\mathbb{P}_{(N=n)}(F=k)$.

Q8. Soit $n \geq k$. Justifier que l'on a

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(F=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Autrement dit, la probabilité conditionnelle de F sachant N est la binomiale $\mathcal{B}(N,p)$.

Q9. Justifier soigneusement la formule suivante. On citera la formule utilisée.

$$\mathbb{P}(F=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(F=k) \times \mathbb{P}(N=n).$$

Q10. Soit $n \geq k$. Montrer que

$$\mathbb{P}_{(N=n)}(F=k) \times \mathbb{P}(N=n) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \frac{[\lambda(1-p)]^{n-k}}{(n-k)!}.$$

Q11. Montrer alors que $\mathbb{P}(F=k) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$. *On pourra faire le changement d'indice $m = n-k$ dans la somme de la question 9.*

Q12. Quelle est la loi de F ?

Partie III- Somme de variables de Poisson indépendantes

Soit $\lambda, \mu > 0$ et soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$. L'objectif de cette partie est de montrer que $X+Y$ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. On note $Z = X+Y$.

Q13. Que vaut $Z(\Omega)$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'égalité

$$\mathbb{P}(Z=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\Big((X=k) \cap (Y=n-k)\Big).$$

Q15. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(Z=n)$ et conclure.

Q16. Peut-on dire que $X+X$ suit la loi de Poisson de paramètre 2λ ?