

Livret de préparation aux écrits

1 Concours CCINP

1.1 Généralités

Quelques remarques d'ordre général :

- En général, la **calculatrice est interdite** à CCINP sur l'épreuve de maths et de modélisation.
- Les annales des sujets sont disponibles à cette adresse : <https://www.concours-commun-inp.fr/fr/epreuves/annales/annales-tsi.html>.
- Je vous invite grandement à lire aussi les **rapports** des épreuves pour voir les erreurs récurrentes à éviter.

Conclusion du rapport 2025 :

Au risque de reprendre les mêmes remarques que dans nos précédents rapports, nous tenons à rappeler aux candidats que nous n'attendons pas d'eux une virtuosité exceptionnelle. Nous sommes conscients que, sans doute plus qu'ailleurs en filière TSI, les mathématiques sont souvent perçues avant tout comme un simple outil au service des autres disciplines telles que la physique ou les sciences de l'ingénieur. Pourtant, les mathématiques ne se limitent pas à cela ; elles sont également le siège de l'argumentation dans sa forme la plus pure et de la rigueur scientifique. Ainsi, notre évaluation ne porte pas seulement sur les techniques mais aussi sur l'honnêteté intellectuelle et la qualité argumentative. Or, trop souvent, ces qualités sont pénalisées par une connaissance trop approximative des outils du cours, ou par une présentation et une expression qui manquent de clarté. Nous encourageons donc les futurs candidats à concentrer leurs efforts sur une maîtrise approfondie des savoirs, et pas uniquement des savoir-faire, qu'il s'agisse des hypothèses des théorèmes ou du vocabulaire, ainsi que sur le soin apporté à la construction d'une argumentation claire et rigoureuse sans oublier la présentation soignée de leur travail. Certains candidats ont pleinement saisi ces exigences et ont été justement récompensés. Nous savons également que les professeurs de CPGE de la filière TSI sont pleinement engagés pour accompagner les futurs ingénieurs vers cet objectif.

1.2 Sujets cherchés pendant la préparation finale aux écrits

Année	Problème étudié	Chapitres concernés
2025	1 et 2	Sujet assez complet
2016	1	Étude de suites récurrentes, de fonctions, TAF (TSI1)
2022	2	An5, An6, AL5 , AL6 Géométrie dans l'espace (TSI1)
2021	3	P1,P2,P3, An4

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.

Si a_0, a_1, \dots, a_{2n} sont $2n + 1$ réels et Q est le polynôme défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, on définit le polynôme $s(Q)$ par : $s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$.

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en "inversant l'ordre des coefficients". Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q = 7X^3 + 2X^2 + 1$, on obtient $s(Q) = X^4 + 2X^2 + 7X$.

Partie I - Étude d'une application linéaire

Q1. Calculer $s(1)$, $s(X^n)$ et $s(X^{2n})$.

Q2. Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est un endomorphisme de E .

Q3. Diagonalisation dans le cas où $n = 1$.

a) Vérifier que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de l'endomorphisme s dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ et justifier, sans calcul, que M est diagonalisable.

b) Montrer que -1 et 1 sont les seules valeurs propres de la matrice M et, pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

c) Déterminer alors une base de E formée de vecteurs propres de s . Préciser la matrice de s dans cette base.

Q4. Étude du cas général.

On ne suppose plus que n est égal à 1. On définit la famille (A_0, \dots, A_{2n}) de polynômes de E par :

$$A_k = \begin{cases} X^{2n-k} + X^k & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \\ X^n & \text{si } k = n \\ X^k - X^{2n-k} & \text{si } n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}.$$

a) Justifier que s est une symétrie. Que peut-on en déduire pour le spectre de s ?

b) Vérifier que (A_0, \dots, A_{2n}) est une famille de vecteurs propres de s .

c) Montrer que la famille (A_0, \dots, A_{2n}) est libre dans E .

d) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable et préciser la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

Partie II - Recherche des racines d'un vecteur propre de s

Q5. Préliminaires.

On définit la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes par : $R_1 = X$, $R_2 = X^2 - 2$ et, pour tout entier k supérieur ou égal à 2 :

$$R_{k+1} = XR_k - R_{k-1}.$$

- a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4 .
- b) Montrer par récurrence que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant, pour tout nombre complexe x non nul, l'égalité :

$$R_k\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}.$$

- c) Pour tout réel a , déterminer, s'ils existent, les complexes x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \frac{1}{x} = a$. On distinguera trois cas.

Q6. Étude des racines d'un vecteur propre de s .

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$, tel que a_{2n} soit non nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[[0; n]]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.

- a) Vérifier que Q est vecteur propre de s et préciser la valeur propre associée.

- b) Justifier que 0 n'est pas racine de Q .

- c) On définit le polynôme \tilde{Q} par : $\tilde{Q} = a_n + \sum_{k=1}^n a_{n-k} R_k$.

Soit x un complexe non nul, on pose : $y = x + \frac{1}{x}$.

Exprimer $x^n \tilde{Q}(y)$ en fonction de $Q(x)$.

En déduire que $Q(x)$ est nul si et seulement si $\tilde{Q}(y)$ est nul.

Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

- d) On suppose dans cette question que n est égal à 3 et que Q est défini par :

$$Q = X^6 + X^5 - 9X^4 + 2X^3 - 9X^2 + X + 1.$$

- i. Vérifier que $\tilde{Q} = X^3 + X^2 - 12X$.

- ii. En déduire les racines de \tilde{Q} puis celles de Q .

Partie III - Étude d'une variable aléatoire

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $\llbracket 1 ; p \rrbracket$ et par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω .

On munit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ de la probabilité uniforme ; autrement dit, pour tout polynôme Q de Ω :

$$\mathbb{P}(\{Q\}) = \frac{1}{\text{Card}(\Omega)}.$$

On admet que cela revient à choisir de manière équiprobable et indépendante chacun des $2n + 1$ coefficients du polynôme Q dans $\llbracket 1 ; p \rrbracket$.

On rappelle que, si a_0, a_1, \dots, a_{2n} sont $2n + 1$ réels et Q est le polynôme défini par :

$$Q = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k,$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k.$$

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k dans $\llbracket 0 ; 2n \rrbracket$ vérifiant $a_k = a_{2n-k}$.

Par exemple, pour $n = 2$ et $Q = X^4 + 7X^3 + 2X^2 + 5X + 1$, on a :

$$\begin{array}{rcllcl} Q & = & X^4 & +7X^3 & +2X^2 & +5X & +1 \\ s(Q) & = & X^4 & +5X^3 & +2X^2 & +7X & +1 \end{array}$$

- $a_0 = a_{2 \times 2 - 0} = 1$;
- $a_1 = 5 \neq a_{2 \times 2 - 1} = 7$;
- $a_2 = a_2 = 2$;
- $a_3 = 7 \neq a_1 = 5$;
- $a_4 = a_{2 \times 2 - 4} = 1$.

Il y a donc exactement trois indices k (0, 2 et 4) pour lesquels $a_k = a_{2n-k}$.

On définit alors l'application Z qui à tout polynôme Q de Ω associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$, et on admet que Z est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Dans l'exemple précédent, on a $Z(Q) = 3$.

Q7. Description d'un cas simple.

Dans cette question seulement, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.

- a) Justifier que Ω est de cardinal 8. Écrire les huit éléments de Ω , puis déterminer la loi de Z .
- b) Calculer l'espérance de Z et montrer que sa variance est égale à 1.

Q8. Simulation informatique.

On rappelle que la commande `np.arange(1, n+1)` du module `numpy` renvoie un vecteur contenant les entiers de 1 à n et que la commande `plt.bar(X, Y)` suivie de `plt.show()` affiche un diagramme en bâtons dont les barres sont situées aux abscisses listées dans le vecteur X et dont les hauteurs sont données par le vecteur Y .

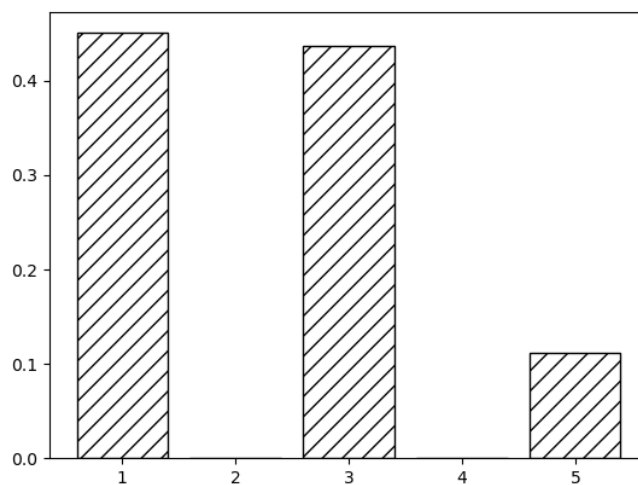
On dispose par ailleurs :

- d'une fonction `aleaQ` qui renvoie un polynôme choisi au hasard et de manière équiprobable dans Ω et dont les différents appels sont indépendants entre eux ;
- d'une fonction `Z` qui prend en argument un polynôme Q et qui renvoie $Z(Q)$.

On considère le programme suivant :

```
1 n, p = 2, 3
2 Support = np.arange(1, 2*n+2)
3
4 N = 10000
5 Obs = np.array([Z(aleaQ()) for _ in range(N)])
6
7 def tabeff(Obs):
8     eff = np.zeros(len(Support))
9     for i in Support:
10        eff[i-1] = sum(Obs == i)
11    return eff
12
13 plt.bar(Support, tabeff(Obs)/len(Obs))
14 plt.show()
```

- a) Que fait la partie du programme située à la ligne 5 ?
- b) Que fait la fonction `tabeff` ? On justifiera précisément et on commentera en particulier la ligne 10.
- c) Le programme affiche le diagramme suivant :



Que représente-t-il ?

On justifiera précisément en s'appuyant notamment sur la ligne 13.

Q9. Étude générale de la variable aléatoire Z .

On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.

Pour tout entier k dans $\llbracket 0 ; 2n \rrbracket$, on définit les variables aléatoires N_k et Z_k de la manière suivante : pour tout polynôme Q de Ω ,

- $N_k(Q)$ est le coefficient d'indice k du polynôme Q (noté a_k précédemment);
- Z_k vaut 1 si le polynôme présente une coïncidence à l'indice k et vaut zéro sinon, autrement dit : $Z_k(Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } N_k(Q) = N_{2n-k}(Q) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

a) Quelle est la loi de Z_n ?

b) Soit $k \in \llbracket 0 ; 2n \rrbracket$. Justifier que N_k suit la loi uniforme sur $\llbracket 1 ; p \rrbracket$.

Donner son espérance et sa variance.

c) Soit $k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$. Montrer que $\mathbb{P}(N_k = N_{2n-k}) = \frac{1}{p}$.

Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales.

d) En déduire, pour tout $k \in \llbracket 0 ; n - 1 \rrbracket$, la loi de Z_k , puis reconnaître, en justifiant, celle

de $Y = \sum_{k=0}^{n-1} Z_k$.

e) Écrire Z en fonction de Y et de Z_n . En déduire l'espérance et la variance de Z .

EXERCICE

Dans tout l'exercice, on désigne par :

- x une variable réelle ;
- y une fonction de la variable x définie sur une partie de \mathbb{R} , y' et y'' , si elles existent, les dérivées première et seconde de y .

Le but de cet exercice est d'étudier différentes propriétés d'une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle :

$$(E) \quad xy'' + y' + xy = 0.$$

Plus précisément, on s'intéresse à la recherche d'une solution de (E) développable en série entière et on exprime, de deux façons différentes, cette solution sous la forme de l'intégrale d'une fonction dépendant d'un paramètre.

Q10. Dans cette question, on étudie l'existence d'une solution $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de (E) développable en série entière et on note R son rayon de convergence.

a) On suppose tout d'abord qu'une telle solution existe.

i. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $a_n = -\frac{1}{n^2} a_{n-2}$.

ii. Justifier que pour tout entier naturel p , $a_{2p+1} = 0$.

iii. Déterminer, pour tout entier naturel p , l'expression de a_{2p} en fonction de p et de a_0 .

b) Conclure quant à l'existence d'une solution de (E) développable en série entière et préciser son rayon de convergence.

Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) qui sont développables en série entière ?

Soient g la fonction des deux variables x et θ définie sur $\mathbb{R} \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$(x, \theta) \mapsto g(x, \theta) = \cos(x \sin \theta)$$

et h la fonction des deux variables x et t définie sur $\mathbb{R} \times [0; 1[$ par :

$$(x, t) \mapsto h(x, t) = \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Q11. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est convergente quel que soit x dans \mathbb{R} .

On pose pour x réel :

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x, \theta) d\theta \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^1 h(x, t) dt.$$

De plus, F désigne désormais l'unique solution de (E) développable en série entière et vérifiant $F(0) = 1$.

Q12. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $G(x) = H(x)$ pour tout réel x .

Q13. Dérivées successives de G .

a) Soient ω un réel et $\varphi : x \mapsto \cos(\omega x)$. Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel x , $\varphi^{(n)}(x) = \omega^n \cos\left(\omega x + n\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , la fonction $(x, \theta) \mapsto \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta)$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, et donner son expression en fonction de x , θ et de n .

- c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer l'existence d'une fonction $M : \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et d'intégrale convergente sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,
- $$\left| \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) \right| \leq M(\theta).$$

On admet dès lors que la fonction G est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout entier naturel n et pour tout réel x :

$$G^{(n)}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial^n g}{\partial x^n}(x, \theta) d\theta.$$

Q14. Montrer que G est développable en série entière sur \mathbb{R} .

Indication : on pourra utiliser une formule de Taylor.

Q15. On note respectivement G' et G'' les dérivées première et seconde de G .

a) Calculer $G(0)$.

b) En utilisant l'expression de $G^{(n)}$ fournie dans la question **Q13**, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = -x(G''(x) + G(x)).$$

Indication : on pourra utiliser une intégration par parties.

c) Pour tout réel x , exprimer $F(x)$ en fonction de $G(x)$, respectivement de $H(x)$.

Q16. Étude de F en $+\infty$.

On fixe un réel $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe $\alpha \in]0; 1[$ tel que, quel que soit le réel x :

$$\left| \int_{\alpha}^1 h(x, t) dt \right| < \varepsilon/2.$$

b) α étant ainsi choisi, montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\alpha} h(x, t) dt = 0.$$

c) En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

On admet que pour tout réel x :

$$H'(x) = \int_0^1 \frac{-t \sin(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Q17. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F'(x)$.

FIN

Problème I

On considère dans ce problème la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par un premier terme u_0 dans $]0, 1[$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 - u_n + 1}.$$

On introduit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$.

I.1. a) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$.

b) En déduire que f est bien définie sur \mathbf{R} .

Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, u_n est bien définie.

c) Déduire de la question **1.a)** que, pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

d) En déduire que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [0, 1]$.

I.2. a) Justifier que f est dérivable sur \mathbf{R} et, pour tout $x \in \mathbf{R}$, calculer $f'(x)$.

On détaillera les calculs effectués.

Déterminer le tableau des variations de f sur $[0, 1]$.

b) Montrer que, pour $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq x$.

c) Représenter alors la courbe représentative de f sur $[0, 1]$.

On se placera dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et on utilisera l'échelle suivante : 10 cm pour 1 unité.

On fera apparaître la tangente horizontale et la première bissectrice.

Dans cette question uniquement, on suppose $u_0 = \frac{1}{4}$; construire à l'aide du graphe précédent les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

d) Montrer que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

I.3. a) Calculer $f(1)$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbf{N}$, $|1 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}|1 - u_n|$.

c) En déduire alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une majoration de $|1 - u_n|$ en fonction de n et de $|1 - u_0|$.

d) En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Fin du premier problème

PROBLÈME 2

Trajectoires orthogonales

Le problème ne nécessite aucune connaissance sur les courbes orthogonales.

Soient (S) un plan et $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de courbes tracées sur (S) , Λ étant un sous-ensemble de \mathbb{R} . On appelle **trajectoire orthogonale** de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ sur (S) , toute courbe C , tracée sur (S) et coupant orthogonalement chacune des Γ_λ ($\lambda \in \Lambda$).

On se place dans la situation suivante.

Soit $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de courbes du plan. Chaque courbe Γ_λ est la courbe représentative d'une fonction y d'une variable réelle x de classe C^1 qui vérifie une équation différentielle :

$$(ED) \quad f(x, y, y') = 0$$

appelée équation différentielle du premier ordre de la famille de courbes $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

On admet qu'une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est :

$$(EDO) \quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

On remplace donc y' par $-\frac{1}{y'}$ dans (ED) . On caractérisera les courbes orthogonales à la famille $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ par les solutions de l'équation (EDO) .

On se place dans l'espace \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel et du repère orthonormé usuel (O, \mathcal{B}) , où \mathcal{B} est la base orthonormée directe usuelle $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous allons montrer sur un exemple qu'il est possible de se ramener au plan (xOy) d'équation $z = 0$.

On considère le plan (S) d'équation :

$$(E) : \quad x + y + z = 0.$$

Partie I - Quelques calculs dans le plan S

- Q21.** Montrer que l'origine O et les points M, N de coordonnées respectives $(1, 0, -1)$ et $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)$ appartiennent au plan (S) .
- Q22.** Démontrer que les vecteurs \vec{OM} et \vec{ON} forment une base du plan (S) .
- Q23.** Calculer le produit vectoriel des vecteurs \vec{OM} et \vec{ON} .
- Q24.** Donner une interprétation géométrique de la norme du produit vectoriel des vecteurs \vec{OM} et \vec{ON} .
- Q25.** Montrer que le point A de coordonnées $(0, 1, 1)$ n'appartient pas au plan (S) .
- Q26.** Calculer le produit mixte des vecteurs \vec{OM}, \vec{ON} et \vec{OA} .
- Q27.** Donner une interprétation géométrique du produit mixte des vecteurs \vec{OM}, \vec{ON} et \vec{OA} .
- Q28.** Donner un vecteur normal au plan (S) .
- Q29.** Donner les coordonnées du projeté orthogonal A' de A sur le plan (S) . On pourra réaliser un schéma pour expliciter la démarche utilisée.
- Q30.** Calculer la distance du point A au plan (S) .

Partie II - Changement de repère

On souhaite effectuer un changement de base orthonormée directe \mathcal{B} de telle sorte qu'une équation du plan (S) soit définie $z = 0$ dans l'espace affine muni de la nouvelle base orthonormée directe.

On considère la famille \mathcal{B}' formée par les vecteurs :

\vec{u}_x de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, \vec{u}_y de coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ et \vec{u}_z de coordonnées $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

- Q31.** Montrer que la famille \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^3 .
- Q32.** Montrer que la base \mathcal{B}' est une base orthonormale.
- Q33.** Montrer que la base \mathcal{B}' est une base orthonormale directe.
- Q34.** Donner la matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base \mathcal{B} vers la base \mathcal{B}' .
- Q35.** Justifier que la matrice de passage $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ de la base \mathcal{B}' vers la base \mathcal{B} est :

$$P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

- Q36.** Vérifier que le vecteur \vec{n} de coordonnées $(1, 1, 1)$ dans la base \mathcal{B} a pour coordonnées $(0, 0, \sqrt{3})$ dans la base \mathcal{B}' .
- Q37.** Justifier que l'équation du plan (S) dans le repère (O, \mathcal{B}') est $z = 0$.
- Q38.** Dans l'espace \mathbb{R}^3 muni du repère (O, \mathcal{B}') , donner la matrice R de la projection orthogonale sur le plan (S) dans la base \mathcal{B}' .
- Q39.** Donner la relation permettant d'obtenir la matrice Q de la projection orthogonale sur le plan (S) dans la base \mathcal{B} en fonction de R , $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. On admet que l'on obtient après calculs :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

- Q40.** Justifier que Q est diagonalisable. Sans calcul et à l'aide des questions précédentes, justifier que les valeurs propres sont 0 et 1.
- Q41.** Montrer que l'espace propre associé à la valeur 1 est engendré par les vecteurs \vec{OM} et \vec{ON} . On rappelle que les points M et N sont définis à **Q21**.

On admet que le travail effectué dans cette partie peut être aussi réalisé pour un plan quelconque. Dans la suite de tout le problème, le plan (S) aura pour équation $z = 0$.

Partie III - Soit $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ la famille des droites du plan $(S) : z = 0$ passant par l'origine. Détermination des trajectoires orthogonales de la famille de droites $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$

L'espace est rapporté à son repère habituel. On considère le plan (S) d'équation $z = 0$. Il est possible, en toute généralité, de se placer dans le cas où (S) est le plan d'équation $z = 0$ dans la base usuelle de \mathbb{R}^3 .

Q42. Déterminer l'équation dans le plan $(S) : z = 0$ de la droite D_λ passant par l'origine O et par le point M_λ de coordonnées $(1, \lambda, 0)$ avec λ réel. Faire un dessin mettant en jeu D_λ , O et M_λ pour expliquer la situation.

Q43. En déduire que la famille de courbes $(D_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ admet pour équation différentielle du premier ordre :

$$(ED_1) \quad y - xy' = 0.$$

Q44. En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème 2, démontrer que les courbes orthogonales ont pour équation différentielle :

$$(EDO_1) \quad y'y + x = 0.$$

Q45. Soit μ un réel positif. Donner les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction :

$$f_\mu : x \mapsto \sqrt{\mu - x^2}.$$

Q46. Montrer que la fonction f_μ est solution de (EDO_1) sur $] -\sqrt{\mu}; 0[\cup]0; \sqrt{\mu}[$.

Q47. Montrer que les trajectoires orthogonales obtenues vérifient l'équation :

$$(EC_1) \quad x^2 + y^2 = \mu \quad \text{avec } \mu \text{ un réel positif non nul.}$$

Q48. Donner la nature géométrique des courbes avec leurs éléments caractéristiques vérifiant l'équation (EC_1) .

Partie IV - Détermination des trajectoires orthogonales de la famille des hyperboles équilatères $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ du plan (S)

On considère la courbe paramétrée C d'équation :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{\cos(t)} \\ y(t) = \tan(t) \end{cases}.$$

Q49. Proposer un ensemble d'étude de la courbe paramétrée C en justifiant votre démarche.

Q50. Étudier la courbe paramétrée C sur l'ensemble $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$. On indiquera en justifiant les tangentes parallèles aux axes le cas échéant.

Q51. Tracer sur votre copie dans un repère orthonormé d'unité 1 cm les droites d'équation $D : y = x$ et $D' : y = -x$.
On admet que ce sont les asymptotes à la courbe.

Q52. Montrer que D et D' sont orthogonales.

Q53. Tracer la courbe C sur le graphique précédent réalisé à la **Q51**.

Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes forment un angle droit. L'équation caractéristique des hyperboles équilatères dont la famille est notée $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est :

$$(EC_2) \quad x^2 - y^2 + \lambda y = 1.$$

Q54. Trouver la valeur de λ pour que C vérifie l'équation (EC_2) .

Q55. Démontrer que famille $(H_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ admet pour équation différentielle :

$$(ED_2) \quad 2xy + (1 - x^2 - y^2)y' = 0.$$

Q56. En utilisant le résultat admis énoncé au début du problème et rappelé ici :

Une équation différentielle de la famille des trajectoires orthogonales de $(\Gamma_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est :

$$(EDO) \quad f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

Démontrer que les courbes orthogonales à la famille (H_λ) ont pour équation différentielle :

$$(EDO_2) \quad 2xyy' - 1 + x^2 + y^2 = 0 \text{ avec } y' \neq 0.$$

Q57. En prenant la fonction $z = y^2$, justifier que z est de classe C^1 , montrer que l'équation (EDO_2) peut s'écrire sous la forme :

$$(E_1) \quad xz' + z - 1 + x^2 = 0.$$

Q58. Trouver une solution particulière de (E_1) sous forme polynomiale.

Q59. Résoudre (E_1) .

Q60. Dédurre que les courbes orthogonales $(C_\mu)_{\mu \in \mathbb{R}}$ à la famille (H_λ) vérifient l'équation :

$$x(x^2 + 3y^2 - 3) - 3\mu = 0.$$

FIN

PROBLÈME 3

Étude d'un couple de variables aléatoires

Présentation générale

On considère l'expérience aléatoire suivante.

On dispose d'une pièce de monnaie donnant Pile avec une probabilité $p \in]0, 1[$ et Face avec une probabilité $1 - p$. On effectue une répétition de lancers de cette pièce. Si le premier Pile a été obtenu au n -ème lancer, on place n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n dans une urne et on pioche une de ces boules au hasard.

On admet l'existence d'un espace probabilisé (Ω, P) modélisant cette expérience aléatoire. On note alors :

- X la variable aléatoire représentant le rang du premier Pile obtenu dans la suite de lancers ;
- N la variable aléatoire représentant le numéro de la boule piochée ensuite dans l'urne.

Prenons un exemple de tirage pour fixer les idées (on note P pour Pile, F pour Face). Si les lancers successifs de la pièce donnent FFFPFF..., alors X vaut 4. On place alors quatre boules numérotées de 1 à 4 dans l'urne (on a alors une chance sur quatre de piocher chacune d'entre elles au tirage qui suit).

Le but de l'exercice est de décrire certains aspects des lois de X et N .

Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

On considère dans cette partie des séries entières d'une variable réelle.

- Q31.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$.
- Q32.** Donner le rayon de convergence et l'expression de la somme de la série dérivée de la précédente.
- Q33.** Donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction $x \mapsto \ln(1 - x)$. On précisera le rayon de convergence de cette série entière.

Partie II - Loi et espérance de X

- Q34.** Rappeler la loi de X . On précisera l'ensemble des valeurs prises par X (noté $X(\Omega)$) et, pour chaque entier n dans cet ensemble, la valeur de $P(X = n)$.
- Q35.** Justifier l'existence de l'espérance de X , notée $E(X)$, et calculer celle-ci.

Partie III - Loi de N

- Q36.** Quel est l'ensemble des valeurs prises par N ? On le notera $N(\Omega)$.
- Q37.** Donner, pour $n \in X(\Omega)$ et $k \in N(\Omega)$, la valeur de la probabilité conditionnelle $P_{[X=n]}(N = k)$. On distinguera les cas $1 \leq k \leq n$ et $k > n$.
- Q38.** Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(N = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

On ne cherchera pas à calculer la somme de cette série.

- Q39.** Calculer la valeur de $P(N = 1)$.

Partie IV - Étude de l'indépendance de X et N

Q40. Rappeler la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 définies sur un espace probabilisé fini et à valeurs respectivement dans les ensembles (finis) E_1 et E_2 .

On admettra que cette définition s'étend au contexte de notre problème (où X et N sont des variables aléatoires prenant un nombre infini de valeurs).

Q41. Montrer que $P(N = 2) > 0$.

Q42. Que vaut $P([X = 1] \cap [N = 2])$?

Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes ?

Partie V - Espérance de N

Q43. Montrer que, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $P(N = k) \leq (1 - p)^{k-1}$.

On pourra remarquer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq k$:

$$\frac{1}{n} p(1-p)^{n-1} \leq p(1-p)^{n-1}.$$

Q44. En déduire que N admet une espérance et que :

$$E(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

Q45. On admet que le calcul de cette espérance peut être effectué en intervertissant l'ordre de sommation ; et que l'on a :

$$E(N) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} p(1-p)^{n-1}.$$

Calculer alors cette espérance et montrer que l'on a :

$$E(N) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

Q46. Montrer que $E(N) \leq E(X)$.

Ce résultat était-il prévisible ?

FIN

2 Concours CCS

2.1 Généralités

Quelques remarques d'ordre général :

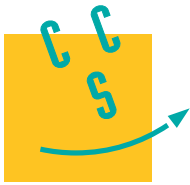
- En général, la calculatrice est autorisée sur les épreuves de maths de CCS. Cela ne veut pas pour autant dire que les résultats des calculs attendus peuvent être donnés sans justification.
- Les annales des sujets sont disponibles à cette adresse : <https://www.concours-centrale-supelec.fr/sujets-rapports>.
- Je vous invite grandement à lire aussi les **rapports** des épreuves pour voir les erreurs récurrentes à éviter.

Exemple de remarque présente dans le rapport du jury de l'épreuve de Maths 1 2024 :

*Le jury a relevé un nombre conséquent de copies manquant de soin avec parfois une rédaction manquant de clarté. Beaucoup de fautes d'orthographe ont été relevées. **La très mauvaise qualité de certaines copies a été sanctionnée.** Les feuilles de brouillon distribuées doivent être utilisées pour que la copie soit claire et les résultats doivent être soulignés ou encadrés. Beaucoup de candidats enchainent les calculs sans explication. La réponse à une question doit toujours être accompagnée de **phrases justificatives.***

2.2 Sujets cherchés pendant la préparation finale aux écrits

Année	Maths 1 ou 2	Chapitres concernés
2022	2	AL4, Nombres complexes, An7
2021	1	An3, An6, AL4, AL1, Analyse de TSI, P1

**Notations**

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a \leq b$, $\llbracket a, b \rrbracket$ désigne l'ensemble des entiers relatifs compris entre a et b .

Si z est un nombre complexe, \bar{z} désigne son conjugué et $|z|$ son module.

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note $\omega = e^{2i\pi/N}$.

$\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille N à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et I_N désigne la matrice identité d'ordre N .

Si $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ est une matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$, la matrice $\bar{A} = (\bar{a}_{i,j})_{1 \leq i, j \leq N}$ désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A .

On note $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , 2π périodiques et continues sur \mathbb{R} .

Rappels

Pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}^0$, les coefficients de Fourier trigonométriques de f sont définis par

$$a_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

et, pour tout entier k dans \mathbb{N}^* ,

$$\begin{cases} a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \\ b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt. \end{cases}$$

Structure et objectifs du problème

Ce problème est composé de cinq parties largement indépendantes.

La première partie consiste à établir quelques calculs utiles dans tout le problème et à étudier le comportement asymptotique des coefficients de Fourier d'une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$ supposée de classe C^1 . La partie II traite de questions d'algèbre linéaire ; le résultat de l'une d'elles pourra être utilisé dans la partie III. La partie III s'intéresse à l'échantillonnage d'un signal continu et à une application, appelée transformation de Fourier discrète, qui permet le traitement d'un signal numérique à partir d'un échantillon. La partie IV est consacrée à l'étude d'un algorithme rapide de calcul d'une transformée de Fourier discrète et au calcul de sa complexité. Enfin, la partie V étudie un opérateur sur l'ensemble des suites périodiques et fournit une application des résultats obtenus dans les parties précédentes.

L'algorithme de transformée de Fourier rapide (Cooley et Tukey, 1965) est, entre autres, à la base des techniques de compression numérique ayant conduit au format JPEG.

I Première partie**I.A – Calculs préliminaires**

Q 1. Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^N = 1$. On exprimera les solutions à l'aide du nombre ω .

Q 2. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs j tels que $\omega^j = 1$.

Q 3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{\omega^k} = \bar{\omega}^k$.

Q 4. Soit q un nombre complexe et N un entier naturel supérieur ou égal à 1. Calculer $\sum_{n=0}^{N-1} q^n$. On distinguera les cas $q = 1$ et $q \neq 1$.

Q 5. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{N-1} \omega^{rn}$, dans les trois cas

$$r = 0, \quad r \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket, \quad r \in \llbracket -(N-1), -1 \rrbracket.$$

I.B – Comportement asymptotique des coefficients de Fourier

À toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$, on associe la suite $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$, à valeur dans \mathbb{C} , définie par $c_0(f) = a_0(f)$ et, $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} c_k(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) - ib_k(f)), \\ c_{-k}(f) = \frac{1}{2}(a_k(f) + ib_k(f)). \end{cases}$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

La suite $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}}$ s'appelle la suite des *coefficients de Fourier exponentiels* de la fonction f . Cette notation est utilisée tout au long du problème.

Q 7. *Question de cours* : citer le théorème de Parseval pour une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Q 8. Pour tout entier naturel k non nul, exprimer $|c_k(f)|^2$ et $|c_{-k}(f)|^2$ en fonction de $a_k^2(f)$ et $b_k^2(f)$ et, en utilisant le théorème de Parseval, démontrer que $\lim_{k \rightarrow +\infty} c_k(f) = \lim_{k \rightarrow +\infty} c_{-k}(f) = 0$.

Dans les trois questions suivantes, f est une fonction 2π périodique, de classe C^1 , à valeurs réelles.

Q 9. Pour tout entier naturel k non nul, justifier l'existence de $a_k(f')$ et $b_k(f')$.

Q 10. À l'aide d'intégrations par parties, démontrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$\begin{cases} a_k(f') = kb_k(f), \\ b_k(f') = -ka_k(f). \end{cases}$$

En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, $c_k(f') = ikc_k(f)$.

Q 11. En déduire que $|c_k(f)| \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$ et $|c_{-k}(f)| \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

II Diagonalisation des matrices circulantes

On rappelle que N est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Pour $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$, on considère la matrice

$$C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} \\ a_{N-1} & a_0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}).$$

II.A – Étude du cas $N = 3$

On note $G_3 = C(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Q 12. Montrer que G_3 est une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Identifier géométriquement l'isométrie canoniquement associée à la matrice G_3 (on précisera ses éléments caractéristiques).

Q 13. Calculer le polynôme caractéristique de G_3 . Montrer que la matrice G_3 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Q 14. Déterminer une matrice P_3 inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $D_3 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ diagonale telles que $G_3 = P_3 D_3 P_3^{-1}$.

Q 15. Pour tout $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$ exprimer $C(a_0, a_1, a_2)$ à l'aide de I_3 , G_3 et G_3^2 et en déduire que $C(a_0, a_1, a_2)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

II.B – Étude du cas général

On note $G_N = C(0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ et g l'endomorphisme de \mathbb{C}^N dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_N) de \mathbb{C}^N est G_N .

Q 16. Montrer que le polynôme caractéristique de G_N est $X^N - 1$.

Q 17. G_N est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$? Justifier.

On note

$$P_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \dots & \omega^{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}$$

la matrice de $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ dont, pour tout couple $(r, s) \in \llbracket 1, N \rrbracket$, le coefficient situé à la ligne r et à la colonne s est égal à $\omega^{(r-1)(s-1)}$.

On rappelle que ω a été défini dans les notations par $\omega = e^{2i\pi/N}$.

Pour $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note C_k la k -ième colonne de la matrice P_N .

Q 18. Calculer le produit matriciel $G_N C_k$. Démontrer que ω^k est une valeur propre de G_N et donner un vecteur propre associé.

Q 19. En déduire que la famille des vecteurs colonnes (C_1, C_2, \dots, C_N) est libre, puis que la matrice P_N est inversible.

Q 20. Calculer le produit matriciel $P_N \overline{P_N}$ et en déduire que $P_N^{-1} = \frac{1}{N} \overline{P_N}$.

Q 21. Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer $g(e_j)$ en fonction des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n . On distinguera le cas $j = 1$.

Q 22. Pour tout $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, exprimer $g^k(e_j)$ en fonction des vecteurs e_1, e_2, \dots, e_n . On distinguera les cas $j > k$ et $j \leq k$.

Q 23. En déduire, pour tout $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, l'expression de G_N^k comme une matrice $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ particulière. (On rappelle que $G_N^0 = I_N$).

Q 24. En exprimant $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ comme combinaison linéaire de $G_N^0, G_N^1, \dots, G_N^{N-1}$ et en utilisant les questions précédentes, justifier que $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$. Donner sa réduite diagonale et une matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Q 25. À l'aide du résultat précédent, calculer le déterminant de la matrice $C(a_0, a_1, \dots, a_{N-1})$.

III Discrétisation et transformée de Fourier discrète

On appelle échantillon de taille N un N -uplet de \mathbb{R}^N .

Pour un signal continu variant dans le temps, l'échantillonnage consiste à prélever un nombre fini de valeurs de ce signal, à intervalles fixes, souvent réguliers.

III.A – Approximation des coefficients de Fourier

Soit f une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}^0$.

Le N -uplet $\left(f\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \right)_{0 \leq n \leq N-1}$ est un échantillon de ce signal.

On pose $a'_0(N) = c'_0(N) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2\pi n}{N}\right)$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$a'_k(N) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \cos\left(k \frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$b'_k(N) = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f\left(\frac{2n\pi}{N}\right) \sin\left(k \frac{2n\pi}{N}\right)$$

$$c'_k(N) = \frac{1}{2}(a'_k(N) - ib'_k(N))$$

$$c'_{-k}(N) = \frac{1}{2}(a'_k(N) + ib'_k(N))$$

Afin d'alléger les notations, on notera respectivement a_k, b_k et c_k les coefficients de Fourier $a_k(f), b_k(f)$ et $c_k(f)$.

Q 26. Justifier, en explicitant le théorème utilisé, que $\lim_{N \rightarrow +\infty} a'_0(N) = a_0$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} a'_k(N) = a_k \text{ et } \lim_{N \rightarrow +\infty} b'_k(N) = b_k.$$

Q 27. En déduire que, pour tout entier relatif k , $\lim_{N \rightarrow +\infty} c'_k(N) = c_k$.

De ce fait, pour de grandes valeurs de N , on prendra le nombre $c'_k(N)$ comme une approximation du coefficient de Fourier c_k .

III.B – Formule d'inversion

Si $u = (u_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ est un échantillon de taille N , on définit $\hat{u} = (\hat{u}_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ par

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad \hat{u}_k = \sum_{n=0}^{N-1} u_n e^{-ik2\pi n/N}. \quad (\text{III.1})$$

L'échantillon \hat{u} s'appelle la transformée de Fourier d'ordre N de l'échantillon u .

Q 28. Combien d'opérations (additions et multiplications entre nombres complexes) sont nécessaires pour calculer les N termes de la transformée de Fourier \hat{u} , connaissant ceux de l'échantillon u et les nombres $e^{-ik2\pi n/N}$? Parmi les multiplications, on ne comptabilise pas celles dont l'un des facteurs est égal à 1.

Q 29. Démontrer que

$$\forall k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad u_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \hat{u}_n e^{ik2\pi n/N}. \quad (\text{III.2})$$

On pourra donner une écriture matricielle des N égalités (III.1) et utiliser la question 20.

Les N égalités (III.2), connues sous le nom de *formule d'inversion de Fourier*, permettent de reconstruire l'échantillon u à partir de sa transformée de Fourier \hat{u} .

Q 30. Montrer que, pour tout $\ell \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, $\bar{\hat{u}}_\ell = \hat{u}_{N-\ell}$.

On suppose dans la question suivante que l'entier naturel N est pair.

Q 31. Combien suffit-il d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes et conjugaison d'un nombre complexe) pour calculer les N termes de la transformée de Fourier \hat{u} , connaissant ceux de l'échantillon u de taille N et les nombres $e^{-ik2\pi n/N}$?

Q 32. Donner un équivalent de ce nombre d'opérations lorsque N tend vers $+\infty$.

IV Transformée de Fourier rapide

La transformée de Fourier rapide est un algorithme dont l'objectif est d'améliorer le temps de calcul des termes de la transformée de Fourier \hat{u} , connaissant ceux de l'échantillon u .

Dans cette partie, on suppose que u est un échantillon dont la taille N est une puissance de 2 ; on écrit donc $N = 2^j$, $j \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que $\omega = e^{2i\pi/N}$.

Pour tout entier r compris entre 0 et $\frac{N}{2} - 1$, on pose $y_r = u_{2r}$ et $z_r = u_{2r+1}$ ce qui définit deux échantillons y et z de taille $\frac{N}{2}$.

Q 33. Montrer que $\hat{u}_{N/2} = \hat{y}_0 - \hat{z}_0$.

Q 34. Montrer que,

$$\forall k \in \llbracket 0, \frac{N}{2} - 1 \rrbracket, \quad \begin{cases} \hat{u}_k = \hat{y}_k + \bar{\omega}^k \hat{z}_k, \\ \hat{u}_{k+N/2} = \hat{y}_k - \bar{\omega}^k \hat{z}_k. \end{cases}$$

On note $T(N)$ le nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes) nécessaires pour calculer selon cette méthode les N termes de la transformée de Fourier d'ordre N d'un échantillon u de taille N connaissant les termes de cet échantillon et les $\bar{\omega}^k$.

Q 35. Justifier que $T(2) = 3$ et démontrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2,

$$\forall r \in \llbracket 2, j \rrbracket, \quad T(2^r) \leq 2T(2^{r-1}) + 4 \times 2^{r-1}.$$

Q 36. Démontrer que

$$T(N) \leq \frac{2}{\ln 2} N \ln N.$$

On pourra utiliser la suite auxiliaire $(t_k)_{1 \leq k \leq j}$, définie par $t_k = \frac{T(2^k)}{2^k}$.

Q 37. Expliquer pourquoi cette méthode est qualifiée de transformée de Fourier « rapide ».

V Convolution circulaire

Étant donné un échantillon $(u_n)_{0 \leq n \leq N-1} \in \mathbb{R}^n$, on appelle suite périodisée, indexée par \mathbb{Z} , de germe $(u_n)_{0 \leq n \leq N-1}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ vérifiant, pour tout entier relatif n , $u_{n+N} = u_n$.

On admet que la donnée d'un germe $(u_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ permet de définir une unique suite périodisée $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

À titre d'exemple, à partir du germe $(2, 4, 7, 9)$, on définit, dans \mathbb{Z} , la suite de période 4 $(\dots, 4, 7, 9, 2, 4, 7, 9, 2, 4, 7, 9, 2, \dots)$.

Les définitions de somme, produit par un nombre réel et produit de suites définies sur \mathbb{N} se prolongent naturellement aux suites définies sur \mathbb{Z} .

Q 38. Étant donnée une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ périodique de période N , démontrer que, pour tout entier relatif $p \in \llbracket -N + 1, 0 \rrbracket$,

$$\sum_{k=p}^{p+N-1} u_k = \sum_{k=0}^{N-1} u_k.$$

À deux suites périodiques de même période N , on associe la suite $u * v$, appelée convolée circulaire des suites u et v , définie par $\forall n \in \mathbb{Z}$, $(u * v)_n = \sum_{k=0}^{N-1} u_k v_{n-k}$.

Q 39. Montrer que la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N est une suite périodique de période N .

Q 40. On considère les suites r et s périodiques de période 3, dont les germes sont $r = (1, 2, 3)$ et $s = (6, 5, 4)$. Donner le germe de $r * s$.

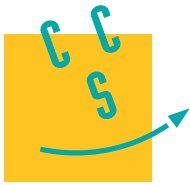
Q 41. Combien d'opérations (additions et multiplications) sont à priori nécessaires pour calculer les N termes $(u * v)_0, (u * v)_1, \dots, (u * v)_{N-1}$ à partir de la donnée de u_0, \dots, u_{N-1} et v_0, \dots, v_{N-1} ?

On définit la transformée de Fourier discrète d'une suite u périodique de période N comme la suite périodisée de période N dont le germe est la transformée de Fourier discrète $(\hat{u}_0, \dots, \hat{u}_{N-1})$ du germe (u_0, \dots, u_{N-1}) de la suite u .

Q 42. Pour deux suites u et v périodiques de période N , montrer que $\widehat{u * v} = \hat{u} \hat{v}$.

Q 43. En utilisant à la fois la transformée de Fourier rapide, le résultat de la question 42 et la formule d'inversion, donner, lorsque $N = 2^j$, un majorant (dépendant de N) du nombre d'opérations (additions, multiplications entre nombres complexes, divisions d'un nombre complexe par un entier naturel) utilisées pour calculer efficacement le germe de la convolée circulaire de deux suites périodiques de période N .

• • • FIN • • •



Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions et l'applique à la résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Notations

— On note $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{C} et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R}^{++} à valeurs complexes.

On admet que $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{C})$ sont des \mathbb{C} -espaces vectoriels.

— Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans \mathbb{C} telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-pt} dt$ converge. On admet que E est un \mathbb{C} -espace vectoriel.

Articulation des parties

Le résultat de la partie I est utilisé dans les parties II et III. Certains résultats de la partie II sont utilisés dans la partie IV. Les parties II et III sont indépendantes.

I Question préliminaire

Q 1. Démontrer le théorème d'intégration par parties pour les intégrales généralisées :

Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{C} telles que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (u(t)v(t))$ existe, alors les intégrales $\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$ sont de même nature. En cas de convergence,

$$\int_0^{+\infty} u'(t)v(t) dt = \left[u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(t)v'(t) dt$$

où $\left[u(t)v(t) \right]_0^{+\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0)$.

II Transformée de Laplace, généralités

II.A –

Q 2. Montrer que, si une fonction f appartient à E alors, pour tout $p \in \mathbb{R}^{++}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ converge. On note alors sa valeur $F(p)$.

On définit ainsi une fonction F , définie sur \mathbb{R}^{++} et à valeurs dans \mathbb{C} .

Q 3. Démontrer que l'application

$$\mathcal{L} : \begin{cases} E & \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C}) \\ f & \mapsto F \end{cases}$$

est linéaire.

\mathcal{L} s'appelle la *transformation de Laplace* et, pour tout $f \in E$, $F = \mathcal{L}(f)$ s'appelle la *transformée de Laplace* de f .

II.B – Quelques exemples

Toutes les fonctions considérées sont définies sur \mathbb{R}^+ .

II.B.1) Pour tout entier naturel n , on note f_n la fonction : $t \mapsto t^n$.

Q 4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E$.

On note alors $F_n = \mathcal{L}(f_n)$.

- Q 5.** Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.
- Q 6.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.
- Q 7.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

II.B.2) Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b , on note $f_{a,b}$ la fonction $t \mapsto e^{-at+ibt}$.

Q 8. Montrer que $f_{a,b} \in E$ et calculer $F_{a,b} = \mathcal{L}(f_{a,b})$.

Q 9. En déduire que les fonctions $g_{a,b} : t \mapsto e^{-at} \cos(bt)$ et $h_{a,b} : t \mapsto e^{-at} \sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b} = \mathcal{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b} = \mathcal{L}(h_{a,b})$.

II.B.3)

Q 10. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur \mathbb{R}^+ , à valeurs dans \mathbb{C} , appartient à E .

Q 11. Donner un exemple de fonction continue sur \mathbb{R}^+ n'appartenant pas à E .

II.C – Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ , que $f \in E$, que $f' \in E$ et que pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)e^{-pt} = 0$.

Q 12. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0).$$

On suppose, en plus, que f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^+ , que $f'' \in E$ et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t)e^{-pt} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$.

Q 13. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).$$

III Approximation de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un segment par des fonctions polynomiales

L'objectif de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Si φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , alors il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de fonctions polynomiales telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{t \in [0,1]} |\varphi(t) - P_n(t)| \right) = 0$.

III.A – Une famille des fonctions polynomiales

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. On note $B_n^k : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \end{cases}$, où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial k parmi n .

Q 14. Donner le degré de B_n^k .

Q 15. Pour tout $t \in [0, 1]$, calculer $\sum_{k=0}^n B_n^k(t)$.

III.B – Deux résultats généraux

Q 16. Montrer que, si Z est une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs positives, alors $\mathbb{E}(Z) \geq 0$. En déduire que, si X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

Q 17. *Question de cours.* X étant une variable aléatoire réelle finie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, rappeler la définition de sa variance, notée $\mathbb{V}(X)$, et démontrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Q 18. En déduire que $|\mathbb{E}(X)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}$.

III.C – Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ à valeurs réelles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $t \in [0, 1]$ et S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres (n, t) . On pose $X_n = \varphi\left(\frac{S_n}{n}\right) - \varphi(t)$.

Q 19. Rappeler la valeur de l'espérance de S_n ainsi que sa variance.

Q 20. En déduire que $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n} - t\right) = 0$ et $\mathbb{E}\left(\left(\frac{S_n}{n} - t\right)^2\right) = \frac{t(1-t)}{n}$.

Q 21. En citant de manière explicite les théorèmes utilisés, montrer qu'il existe $M_\varphi \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall(a, b) \in [0, 1]^2, \quad |\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M_\varphi |b - a|.$$

Q 22. En utilisant les résultats des questions 18, 21 et 16 puis 20, montrer que

$$|\mathbb{E}(X_n)| \leq \frac{M_\varphi}{\sqrt{n}} \sqrt{t(1-t)}.$$

Q 23. En citant le théorème utilisé, en déduire que, pour tout nombre réel $t \in [0, 1]$,

$$\left| \varphi(t) - \sum_{k=0}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) B_n^k(t) \right| \leq M_\varphi \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

Q 24. Justifier que la fonction

$$w : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto t(1-t) \end{cases}$$

admet un maximum et déterminer la valeur de ce maximum.

Q 25. En déduire qu'il existe une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n \geq 1}$ telle que la suite $\left(\sup_{t \in [0, 1]} |\varphi(t) - P_n(t)|\right)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

On admet que ce résultat, démontré dans le cas où la fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, est encore valable lorsque la fonction φ est seulement continue sur $[0, 1]$. Ce dernier résultat sera utilisé dans la partie IV.

IV Injectivité de la transformation de Laplace et applications

IV.A – On se propose dans cette sous-partie de démontrer que l'application \mathcal{L} est injective sur E , c'est-à-dire que

$$\forall(y_1, y_2) \in E^2, \quad \mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) \implies y_1 = y_2.$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathcal{L}(f) = 0$.

Pour tout nombre réel $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(t) = \int_0^t f(s)e^{-s} ds$.

Q 26. Justifier que la fonction g est dérivable sur \mathbb{R}^+ et calculer sa dérivée.

Q 27. Montrer que g est une fonction bornée.

Q 28. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'existence de $\mathcal{L}(g)(p)$ et démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p} \mathcal{L}(f)(p+1).$$

On note φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{si } 0 < u \leq 1, \\ \int_0^{+\infty} f(t)e^{-t} dt & \text{si } u = 0. \end{cases}$

Q 29. Montrer que φ est continue sur le segment $[0, 1]$.

Q 30. En effectuant le changement de variables $t = -\ln u$ et en citant explicitement le théorème de changement de variable dans une intégrale généralisée, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \int_0^{+\infty} g(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1} du.$$

Q 31. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \varphi(u)u^n du = 0$ et que, pour toute fonction P polynomiale,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t) dt = 0.$$

Q 32. En utilisant le résultat admis à la fin de la partie III, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 1}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t) dt - \int_0^1 \varphi^2(t) dt \right) = 0.$$

- Q 33.** En déduire que $f = 0$.
Q 34. Démontrer que \mathcal{L} est injective.

IV.B – Le but de cette sous-partie est de résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^+, & y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

IV.B.1) Résolution classique

- Q 35.** Démontrer qu'il existe une solution particulière de l'équation $y''(t) + 2y'(t) + 2y(t) = t + 1$ de la forme $y(t) = at + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Q 36. Résoudre alors le problème (IV.1).

IV.B.2) Résolution utilisant la transformation de Laplace

On suppose que y est une solution du problème (IV.1) vérifiant en plus les hypothèses de la sous-partie II.C.

- Q 37.** Démontrer que, pour tout réel p strictement positif, $(p^2 + 2p + 2)\mathcal{L}(y)(p) = \frac{1+p+p^2}{p^2}$.
Q 38. Déterminer deux nombres réels a et b tels que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{1+p+p^2}{p^2(p^2+2p+2)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{(p+1)^2+1}.$$

- Q 39.** En déduire une expression de $\mathcal{L}(y)$, puis de y en utilisant l'injectivité de \mathcal{L} et les résultats de la sous-partie II.B.
Q 40. Réciproquement, vérifier que la fonction y ainsi trouvée est bien solution du problème (IV.1).

IV.C – Le but de cette sous-partie est de déterminer les fonctions x et y de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^+ solutions du système différentiel

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = 6x(t) - 7y(t) \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

et vérifiant les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

IV.C.1) Résolution classique

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, de sorte que le système (IV.2) s'écrit matriciellement $X'(t) = AX(t)$.

- Q 41.** Montrer qu'il existe une matrice $P \in GL_2(\mathbb{R})$, que l'on déterminera, telle que

$$A = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

- Q 42.** On pose $U(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = P^{-1}X(t)$. Déterminer les fonctions u et v et en déduire les fonctions x et y vérifiant le système (IV.2) et les conditions initiales imposées.

IV.C.2) Résolution en utilisant la transformation de Laplace

On suppose que x et y sont solutions du problème (IV.2), vérifiant en plus les conditions de la sous-partie II.C.

- Q 43.** Montrer alors que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{-3}{(p+1)(p+4)} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{p-2}{(p+1)(p+4)} \end{cases}$$

- Q 44.** Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+4} \\ \mathcal{L}(y)(p) = \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p+4} \end{cases}$$

- Q 45.** En déduire une expression de x et de y .
Q 46. Établir la réciproque et conclure.

• • • FIN • • •