CCINP
Session 2021
Corrigé de l'épreuve de mathématiques TSI

Problème 1

Partie I – Étude de la fonction g

1. On a $g(1) = 1$. D'autre part, les fonctions $x \mapsto x \ln x$ et exp sont respectivement dérivables sur I et $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur I par composition.
2. g est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = (1 + \ln x) e^{x \ln x}.$$

Or exp est strictement positive donc, par stricte croissance de ln,

$$g'(x) \geq 0 \iff 1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > e^{-1}.$$

On a clairement $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$. D'autre part, par croissances comparées et continuité de exp en 0,

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \to 0^+} g(x) = 1.$$

Ainsi

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$g'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	|| 1	$\searrow$	$e^{-1/e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. On rappelle que $g(1) = 1$, et on a

$$g'(1) = (1 + \ln 1) e^{1 \ln 1} = 1.$$

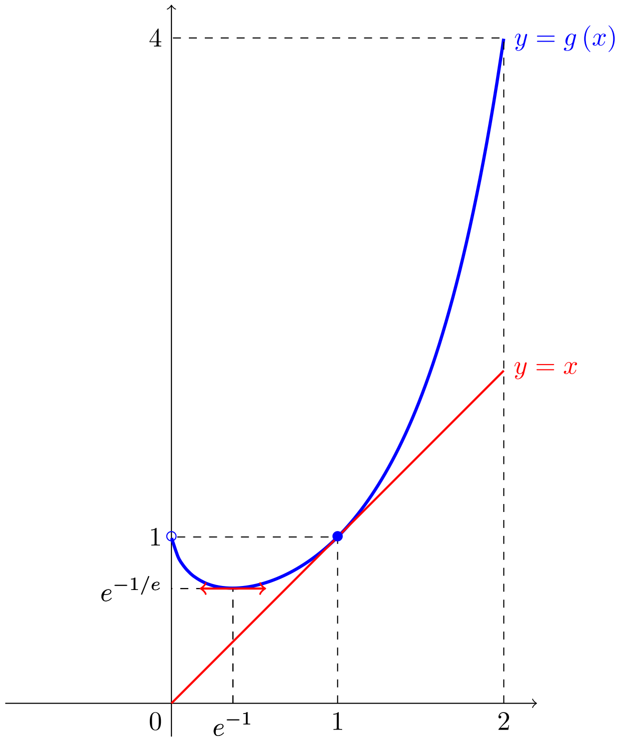
Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(1) + (x-1) g'(1) = 1 + (x - 1) = x.$$

Donc une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est $y = x$.
4. On a, pour x au voisinage de 1,

$$g(x) - x \underset{x \to 1}{=} (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

Or $(x-1)^2 \geq 0$, donc la courbe représentative de g est localement au-dessus de sa tangente. au point d'abscisse 1.
5. D'après le tableau de variations obtenu précédemment, on trace la courbe représentative de g et sa tangente :



6. Sur $[0,1]$, la fonction g est comprise entre $e^{-1/e}$ et 1. L'aire sous la courbe est donc supérieure à $1 \times e^{-1/e}$ et inférieure à 1×1. D'où

$$e^{-1/e} \leq \int_0^1 x^x \, dx \leq 1.$$

Partie II – Une approximation plus précise de $\int_0^1 x^x \, dx$

Partie II.1 – Un calcul d'intégrales

7. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^n \, dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

8. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Par croissances comparées,

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln^k x = 0,$$

donc la fonction $x \mapsto x^n \ln^k x$ est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement prend la valeur 0.

9. Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Soit $a \in]0,1[$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ et $x \mapsto \ln^k x$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,1]$ et donc, par intégration par parties,

$$\int_a^1 x^n \ln^k x \, dx = \left[\frac{x^{n+1} \ln^k x}{n+1}\right]_a^1 - \frac{k}{n+1} \int_a^1 x^{n+1} \frac{\ln^{k-1} x}{x} \, dx = -\frac{a^{n+1} \ln^k a}{n+1} - \frac{k}{n+1} \int_a^1 x^n \ln^{k-1} x \, dx.$$

D'une part, les fonctions $x \mapsto x^n \ln^k x$ et $x \mapsto x^n \ln^{k-1} x$ sont prolongeables par continuité en 0. D'autre part, toujours par croissances comparées,

$$\lim_{a \to 0^+} -\frac{a^{n+1} \ln^k a}{n+1} = 0.$$

On peut donc passer à la limite quand $a \to 0^+$, et ainsi
$$\int_0^1 x^n \ln^k x \; dx = -\frac{k}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^{k-1} x \; dx.$$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^1 x^n \ln^k x \; dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}.$$

- $\boxed{\text{Initialisation}}$ On a bien
$$\int_0^1 x^n \ln^0 x \; dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^0 0!}{(n+1)^1}.$$

- $\boxed{\text{Hérédité}}$ Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln^k x \; dx = \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}}$. Alors, d'après la question précédente,
$$\int_0^1 x^n \ln^{k+1} x \; dx = -\frac{k+1}{n+1} \int_0^1 x^n \ln^k x \; dx = -\frac{k+1}{n+1} \times \frac{(-1)^k k!}{(n+1)^{k+1}} = \frac{(-1)^{k+1} (k+1)!}{(n+1)^{k+2}}.$$
Ce qui achève l'hérédité. Par principe de récurrence, le résultat est donc vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$. La formule est également vrai si $n = 0$ et $k = 0$, car $\displaystyle\int_0^1 1 \; dx = 1$.

Partie II.2 – Expression de $\displaystyle\int_0^1 x^x \; dx$ à l'aide d'une série

11. La série entière $z \mapsto e^z$ est développable en série entière sur $\mathbb{C}$ (rayon de convergence infini) et
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

12. Question impossible à traiter avec les outils du programme de TSI (la seule interversion série/intégrale possible se faisant à l'aide du théorème d'intégration terme à terme).

13. D'après la question 10, on a
$$\int_0^1 x^x \; dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 \frac{x^n \ln^n x}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \times \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

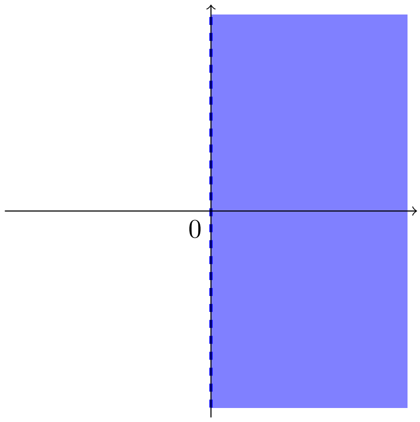
14. (a) On pourra définir la fonction `approximation(e)` de la manière suivante :

```python
def approximation(e):
    s=1
    p=0
    while 1/((p+2)**(p+2))>e:
        p+=1
        s+=((-1)**p)/((p+1)**(p+1))
    return s
```

(b) En notant, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$, on a
$$\left| \int_0^1 x^x \; dx - S_N \right| = |R_N| \leq \frac{1}{(N+2)^{N+2}}.$$
Ainsi, pour $N = 1$, on a
$$\left| \int_0^1 x^x \; dx - S_1 \right| \leq \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}.$$
Une approximation de $\displaystyle\int_0^1 x^x \; dx$ à $\dfrac{1}{27}$ près est donc
$$S_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Partie III – Étude du point critique de la surface $z = x^y - x$

15. Le nombre x^y existe si, et seulement si, $x > 0$. Ainsi $f(x,y)$ est défini si, et seulement si, $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. D'où $D_f = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On le représente ainsi :



16. Soit $(x,y) \in D_f$. Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = yx^{y-1} - 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\ln x)\, e^{y \ln x}.$$

D'où

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} (\ln x)\, e^{y\ln x} = 0 \\ yx^{y-1} - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Ainsi, $(1,1)$ est l'unique point critique de f sur D_f, et on a bien

$$f(1,1) = 1^1 - 1 = 0.$$

17. Soit $h \in \left]-1,1\right[$. Alors, par développements limités usuels,

$$\begin{aligned}(1+h)^{1-h} &= \exp\left((1-h)\ln(1+h)\right) = \exp\left((1-h)\left(h - \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right)\right) = \exp\left(h - \frac{3}{2}h^2 + o\left(h^2\right)\right) \\ &= 1 + \left(h - \frac{3}{2}h^2 + o\left(h^2\right)\right) + \frac{1}{2}\left(h - \frac{3}{2}h^2 + o\left(h^2\right)\right)^2 + o\left(h^2\right) \\ &= 1 + h - h^2 + o\left(h^2\right).\end{aligned}$$

18. Rappelons que $f(1,1) = 0$. D'une part, d'après la question précédente, pour h au voisinage de 0,

$$f(1+h, 1-h) \underset{h\to 0}{=\!=} -h^2 + o\left(h^2\right),$$

donc $f(1+h,1-h) \leq 0$ donc $(1,1)$ n'est pas un minimum. D'autre part, d'après la question 4, pour x au voisinage de 1,

$$f(x,x) = g(x,x) - x \underset{x\to 1}{=\!=} (x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right),$$

donc $f(x,x) \geq 0$ donc $(1,1)$ n'est pas un maximum. Ainsi $(1,1)$ n'est pas un extremum de f.

19.
- Notons $\mathscr{S}$ la surface d'équation cartésienne $z = f(x,y)$ et $\varphi : (x,y,z) \mapsto z - f(x,y)$. On a bien $f(1,1) = 0$ donc $A = (1,1,0) \in \mathscr{S}$, notons alors $\mathscr{P}_A$ le plan tangent à $\mathscr{S}$ en A. On a également

$$\nabla\varphi(x,y,z) = \left(1 - yx^{y-1}, -e^{y\ln x}\ln x, 1\right), \quad \nabla\varphi(1,1,0) = (0,0,1).$$

Ainsi A est un point régulier de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}_A$ est donc orthogonal à $\nabla\varphi(1,1,0)$. Pour $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a donc

$$M \in \mathscr{P}_A \iff \overrightarrow{AM} \perp \nabla f(1,1,0) \iff (x-1, y-1, z)\cdot(0,0,1) = 0 \iff z = 0.$$

$\mathscr{P}_A$ est donc le plan horizontal d'équation $z = 0$.
- D'après la question précédente, la surface $\mathscr{S}$ traverse le plan $\mathscr{P}_A$.

Problème 2 – Calcul d'une limite à l'aide d'une série de Fourier

Partie I – Existence des I_n et réécriture

20. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$, la seule borne incertaine de I_0 est donc $+\infty$. Pour tout $x > 0$,
$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1 \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$
Ainsi, par définition, l'intégrale I_0 est convergente (et on a $I_0 = 1$).

21. On a
$$\sum_p e^{-p\pi} = \sum_p \left(e^{-\pi}\right)^p.$$
On reconnait une série géométrique de raison $e^{-\pi} \in]0, 1[$. La série est donc convergente et $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p\pi} = \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$.

22. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, d'après les formules d'Euler,
$$-2ie^{i\theta} \sin\theta = -2ie^{i\theta} \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) = -\left(e^{2i\theta} - 1\right) = 1 - e^{2i\theta}.$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, en reconnaissant une somme géométrique et en utilisant la question 22,
$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx} &\underset{j=k+n}{=\!=} \sum_{j=0}^{2n} e^{2ix(j-n)} = e^{-2inx} \sum_{j=0}^{2n} \left(e^{2ix}\right)^j = e^{-2inx} \frac{1 - e^{2(2n+1)ix}}{1 - e^{2ix}} \\ &= \frac{e^{-2inx} - e^{2i(n+1)x}}{-2ie^{ix} \sin x} = \frac{e^{i(2n+1)x} - e^{-i(2n+1)x}}{2i \sin x} = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\end{aligned}$$

24. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Alors, d'après la question précédente puis par inégalité triangulaire,
$$\left|\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} e^{-x}\right| = |e^{-x}| \left|\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}\right| \leq e^{-x} \sum_{k=-n}^{n} \left|e^{2ikx}\right| = e^{-x} \sum_{k=-n}^{n} 1 = (2n+1)\, e^{-x}.$$

25. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} e^{-x}$.
   - La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$, donc 0 et $+\infty$ sont des bornes incertaines de I_n. On étudie donc la nature des intégrales $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$.
     - Pour $x \in]0, 1[$,
     $$f_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} e^{-x} \sim_{x \to 0} \frac{(2n+1)\, x}{x} \times 1 = 2n + 1.$$
     La fonction f_n est donc prolongeable par continuité en 0, et l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)\, dx$ est donc convergente.
     - On s'intéresse à la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$. Pour tout $x > 1$, on a, d'après la question précédente,
     $$|f_n(x)| = \left|\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x} e^{-x}\right| \leq (2n+1)\, e^{-x}.$$
     Or les fonctions $|f_n|$ et $x \mapsto (2n+1)\, e^{-x}$ sont positives et continues sur $[1, +\infty[$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} (2n+1)\, e^{-x} dx$ est convergente d'après la question 20. Par théorème de comparaison des fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)\, dx$ est absolument convergente, donc convergente.

   Ainsi, par définition, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\, dx$ est convergente.

- L'intégrale I_n étant convergente, on a, par relation de Chasles

$$I_n = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{(N+1)\pi} f_n(x)\,dx = \lim_{N\to+\infty}\sum_{p=0}^{N}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi} f_n(x)\,dx = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}e^{-x}dx.$$

Ainsi, d'après la question 23,

$$I_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}\right)e^{-x}dx.$$

Partie II – Étude de la convergence de (I_n)

26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction cos étant paire, on a directement

$$a_k(f) + a_{-k}(f) = 2a_k(f).$$

De même la fonction sin étant impaire, on a

$$b_k(f) + b_{-k}(f) = 0.$$

27. On reprend le résultat de la question 25. Soit $p \in \mathbb{N}$, on pose $x = \varphi_p(t) = \dfrac{t}{2} + p\pi$, alors $\varphi_p : [0; 2\pi] \to [p\pi; (p+1)\pi]$ est $\mathcal{C}^1$, bijective (strictement croissante) et les bornes deviennent

$$\begin{cases} x = p\pi \Rightarrow t = 0 \\ x = (p+1)\pi \Rightarrow t = 2\pi \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{p=0}^{+\infty}\int_{p\pi}^{(p+1)\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{2ikx}\right)e^{-x}dx \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt+2ikp\pi}e^{-\frac{t}{2}-p\pi}\frac{1}{2}dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}e^{-\frac{t}{2}-p\pi}dt\right) \quad \text{car } e^{2ikp\pi} = 1 \end{aligned}$$

28. D'après la question 21.

$$\sum_{p=0}^{+\infty} e^{-p\pi} = \frac{1}{1-e^{-\pi}}$$

d'où

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}e^{-\frac{t}{2}-p\pi}dt\right) = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}(\cos(kt)+i\sin(kt))e^{-\frac{t}{2}-p\pi}dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_0^{2\pi}\cos(kt)e^{-\frac{t}{2}}dt + i\sin(kt)e^{-\frac{t}{2}}dt\right)e^{-p\pi} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}e^{-p\pi}\sum_{k=-n}^{n}\pi(a_k(f)+ib_k(f)) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\sum_{k=-n}^{n} a_k(f)+ib_k(f) \end{aligned}$$

29. On a $b_0(f) = 0$ et d'après la question 26. $a_k(f) + a_{-k}(f) = 2a_k(f)$, $b_k(f) + b_{-k}(f) = 0$. D'où

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(\sum_{k=-n}^{n} a_k(f) + ib_k(f)\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(\sum_{k=-n}^{1} (a_k(f) + ib_k(f)) + (a_0(f) + b_0(f)) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f) + ib_k(f))\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_{-k}(f) + ib_{-k}(f)) + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f) + ib_k(f))\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} (a_{-k}(f) + a_k(f) + i(b_{-k}(f) + b_{-k}(f)))\right)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} 2a_k(f)\right)\\
&= \frac{\pi}{1-e^{-\pi}}\left(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\right)
\end{aligned}$$

30. La fonction f est 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux donc le théorème de Dirichlet s'applique : la série de Fourier de f converge en tout point vers la régularisée de f.
La définition du coefficient de Fourier $a_0(f)$ donnée par l'énoncé ne correspond pas à celle imposée par le programme de TSI.
Ainsi en 0 on a, en notant $\widetilde{f}$ la régularisée de f et $S(f)$ sa série de Fourier,

$$\widetilde{f}(0) = \frac{1+e^{-\pi}}{2} = S(f)(0) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k(f)$$

Ainsi la série $\sum_{k\geq 1} a_k(f)$ converge, donc I_n converge et on a

$$\begin{aligned}
& \widetilde{f}(0) = \frac{1+e^{-\pi}}{2} &= \frac{1-e^{-\pi}}{\pi}\lim_{n\to+\infty} I_n\\
\iff & \lim_{n\to+\infty} I_n &= \frac{\pi}{2}\frac{1+e^{-\pi}}{1-e^{-\pi}}
\end{aligned}$$

Problème 3 – Variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$

Partie I – Marche aléatoire sur un carré

1 – Rotations du plan

31. C'est une question de cours, la matrice de rotation d'angle θ est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

32. On a directement

$$f_\theta(x, y) = (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$$

33. L'affixe d'un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est donnée par $a + ib$ dans $\mathbb{C}$. Ainsi l'affixe de $f_\theta(x, y)$ est

$$\cos(\theta)x - \sin(\theta)y + i(\sin(\theta)x + \cos(\theta)y) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))x + (\cos(\theta) + i\sin(\theta))y = e^{i\theta}(x + iy)$$

2 – Racines n-ièmes de l'unité

34. Pour tout $k \in [\![0;n-1]\!]$, on a $(\omega_k)^n = 1$ donc ce sont bien des racines n-ième de l'unité.
Par ailleurs, pour $k < l \in [\![0;n-1]\!]$, on a $\omega_k \neq \omega_l$. En effet $\dfrac{\omega_l}{\omega_k} = \omega_{l-k} \neq 1$ car $0 < l-k < n$.
Ainsi, on a n solutions distinctes à l'équation polynomiale de degré n : $z^n = 1$, donc ce sont précisément les racines n-ième de l'unité.
35. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$, on calcule
$$r_{2\pi/n}(\omega_k) = e^{\frac{2i\pi}{n}}\omega_k = e^{\frac{2i\pi}{n}} e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2(k+1)i\pi}{n}} = \omega_{k+1}$$
36. Un simple calcul nous donne pour $n = 4$
$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = i, \quad \omega_2 = -1, \quad \omega_3 = -i.$$

3 – Marche aléatoire sur un carré

37. L'énoncé ne précise pas que le déplacement se fait seulement sur les points adjacents. Les points adjacents s'obtiennent par rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$, et ce avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\mathbb{P}\left(A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}}A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_{n+1} = e^{-i\frac{\pi}{2}}A_n\right) = \frac{1}{2}.$$
Ainsi avec les notations de l'énoncé, on a bien
$$A_{n+1} = e^{i\frac{\pi}{2}D_n}A_n.$$
38. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales en considérant le système complet d'évènements donné par l'énoncé
$$\begin{aligned} P(A_{n+1}=1) &= P(A_n=1)\,P_{(A_n=1)}(A_{n+1}=1) + P(A_n=i)\,P_{(A_n=i)}(A_{n+1}=1) \\ &\quad + P(A_n=-1)\,P_{(A_n=-1)}(A_{n+1}=1) + P(A_n=-i)\,P_{(A_n=-i)}(A_{n+1}=1) \\ &= \frac{1}{2}P_{(A_n=i)}(A_{n+1}=1) + \frac{1}{2}P_{(A_n=-i)}(A_{n+1}=1) \end{aligned}$$
39. Comme on ne peut se déplacer que sur un point adjacent avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, on obtient des formules identiques
$$\begin{cases} P(A_{n+1}=i) = \frac{1}{2}P_{(A_n=1)}(A_{n+1}=i) + \frac{1}{2}P_{(A_n=-1)}(A_{n+1}=i) \\ P(A_{n+1}=-1) = \frac{1}{2}P_{(A_n=i)}(A_{n+1}=-1) + \frac{1}{2}P_{(A_n=-i)}(A_{n+1}=-1) \\ P(A_{n+1}=-i) = \frac{1}{2}P_{(A_n=1)}(A_{n+1}=-i) + \frac{1}{2}P_{(A_n=-1)}(A_{n+1}=-i) \end{cases}$$
40. La matrice M est symétrique réelle, donc d'après le théorème spectral M est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
41. La matrice M n'est pas inversible car elle possède des colonnes identiques.
42. On résout pour $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ l'équation
$$MX = -X \iff \begin{cases} y+t = -2x \\ x+z = -2y \\ y+t = -2z \\ x+z = -2t \end{cases} \iff X \in \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$
43. On calcule
$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
donc $(1,1,1,1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1.

44. Par définition
$$\mathrm{Im}\,(M) = \mathrm{Vect}\,(Me_1, Me_2, Me_3, Me_4) = \mathrm{Vect}\,((1,0,1,0)\,,(0,1,0,1))$$
où on a noté (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
A l'aide de la formule du rang, on en déduit que
$$\dim\left(E_0\left(M\right)\right) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(M\right)\right) = 4 - \dim\left(\mathrm{Im}\left(M\right)\right) = 2$$
Par ailleurs, d'après la question 42, $\dim\left(E_{-1}\left(M\right)\right) = 1$ et d'après la question 43, $\dim\left(E_1\left(M\right)\right) \geq 1$. Mais la somme des dimensions des espaces propres est inférieure ou égale à 4. Ainsi $0, 1, -1$ sont les seules valeurs propres de M et
$$\dim\left(E_0\left(M\right)\right) + \dim\left(E_{-1}\left(M\right)\right) + \dim\left(E_1\left(M\right)\right) = 4$$
donc M est diagonalisable.

45. A l'aide de la question 39 on commence par observer que tout pour $n \in \mathbb{N}$
$$U_{n+1} = MU_n.$$
On en déduit alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$U_n = M^n U_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Ainsi on peut déterminer les probabilités au rang n à l'aide des puissances M^n et de la position au rang 0.
Il reste alors à déterminer M^n. Pour cela il suffit de trouver une base de diagonalisation, car M est diagonalisable. En notant P la matrice de vecteurs propres associées aux valeurs propres $0, -1, 1$, et D la matrice diagonale (de diagonale $(0, 0, -1, 1)$) on a la relation
$$M = PDP^{-1}$$
et on montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$M^n = PD^nP^{-1}.$$
Ainsi les probabilités au rang n sont données par les relations
$$U_n = PD^nP^{-1}U_0$$

Partie II – Orthonormalité des lois de Rademacher

1 – Un produit scalaire

46. Si X suit une loi de Rademacher, alors $X \in V_f(\Omega)$ car X est définie sur Ω et $X(\Omega) = \{-1; 1\}$ est fini. Par ailleurs,
$$E(X) = 1 \times P(X = 1) - 1 \times P(X = -1) = 0.$$

47. La variable aléatoire nulle ne prend qu'une seule valeur donc elle appartient à $V_f(\Omega)$. Pour $X, Y \in V_f(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda X + Y \in V_f(\Omega)$ car $\lambda X + Y$ prend un nombre fini de valeurs. Ainsi $V_f(\Omega)$ est un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des variables aléatoires réelles discrètes sur Ω, donc c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

48. Montrons que $\Phi(.,.)$ est un produit scalaire sur $V_f(\Omega)$.
Symétrie : pour $X, Y \in V_f(\Omega)$, on a
$$\Phi(X, Y) = E(XY) = E(YX) = \Phi(YX).$$
Bilinéaire : pour $X, Y, Z \in V_f(\Omega)$, on a
$$\Phi(\lambda X + Y, Z) = E((\lambda X + Y)Z) = E(\lambda XZ + YZ) = \lambda E(XZ) + E(YZ) = \lambda \Phi(X, Z) + \Phi(Y, Z)$$
par linéarité de l'espérance. Ainsi $\Phi(.,.)$ est linéaire à gauche. Par symétrie, Φ est bilinéaire.

Positive : pour $X \in V_f(\Omega)$, on a

$$\Phi(X,X) = E\left(X^2\right) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x) \geq 0$$

car $x^2 \geq 0, P(X = x) \geq 0$. Ainsi Φ est positive.
Définie : pour $X \in V_f(\Omega)$ telle que

$$\Phi(X,X) = 0$$

i.e.

$$\sum_{x \in \Omega} x^2 P(X = x) = 0.$$

Ainsi puisqu'une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^* \cap X(\Omega)$, $P(X = x) = 0$. On en déduit que $P(X = 0) = 1$ et ainsi X est la variable aléatoire nulle, donc Φ est définie.

2 – Orthonormalité et projection

49. Les variables aléatoires $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ étant indépendantes, on a pour tout $i \neq j \in [\![1,n]\!]$

$$\Phi(X_i, X_j) = E(X_i X_j) = E(X_i)\,E(X_j) = 0$$

donc les $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont 2 à 2 orthogonaux.
Par ailleurs pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\Phi(X_i, X_i) = E\left(X_i^2\right) = (1)^2 P(X_i = 1) + (-1)^2 P(X_i = -1) = 1$$

Ainsi $(X_1, \ldots, X_n)$ est une famille orthonormale dans $V_f(\Omega)$ pour le produit scalaire Φ.

50. La famille qui engendre F est orthogonale donc libre, ainsi on a

$$\dim(F) = n.$$

51. Soit $X \in V_f(\Omega)$ indépendante des variables $X_1, \ldots, X_n$. Alors pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\Phi(X, X_i) = E(XX_i) = E(X)\,E(X_i) = E(X) \times 0 = 0$$

donc X est orthogonal à chaque X_i pour le produit scalaire. Or les (X_i) engendrent F, donc $X \in F^{\perp}$.

52. Considérons $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la variable aléatoire $\dfrac{X_i + 1}{2}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$. En effet, X_i suit une loi de Rademacher donc $(X_i + 1)(\Omega) = \{0, 2\}$ et ainsi $\dfrac{X_i + 1}{2}(\Omega) = \{0, 1\}$ avec

$$P\left(\frac{X_i + 1}{2} = 0\right) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P\left(\frac{X_i + 1}{2} = 1\right) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$$

Ainsi par indépendance des $\left(\dfrac{X_i + 1}{2}\right)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la variable aléatoire $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}$ suit une loi binomiale de paramètre $n, p = \dfrac{1}{2}$.
Enfin

$$d(X, F) = ||p_{F^{\perp}}(X)||$$

Or par linéarité

$$p_{F^{\perp}}(X) = p_{F^{\perp}}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i + 1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} p_{F^{\perp}}(X_i) + p_{F^{\perp}}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

car les $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in F$ et la variable aléatoire $Y = \dfrac{n}{2}$ de loi certaine $n/2$ appartient à $F^{\perp}$. En effet

$$\varphi(X_i, Y) = E(X_i Y) = E\left(X_i \frac{n}{2}\right) = \frac{n}{2} E(X_i) = 0$$

Ainsi

$$d(X, F) = ||p_{F^{\perp}}(X)|| = ||Y|| = \sqrt{\Phi(Y, Y)} = \sqrt{\Phi\left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}\right)} = \frac{n}{2}$$